Michael de Villiers, Južna Afrika

Neka razmišljanja o van Hieleovoj teoriji

Van Hieleova teorija je začeta u doktorskoj dizertaciji Dine van Hiele-Geldof i njezinog supruga Pierrea van Hielea, na Sveučilištu Utrecht u Nizozemskoj 1957. godine. Dina je nažalost preminula nedugo nakon završetka svoje dizertacije, a Pierre je nastavio dalje razvijati i širiti teoriju u kasnijim publikacijama.

Dok se Pierreova dizertacija pretežno trudila objasniti zašto se učenici susreću s problemima pri učenju geometrije (u ovom slučaju to je bilo **objašnjavanje i opisivanje**), Dinina je dizertacija govorila o eksperimentu u poučavanju, i u tom smislu je bila više **propisana** glede redoslijeda geometrijskog sadržaja i navika u učenju učenika.

Najočitija karakteristika teorije jest njezina različitost od pet posebnih razina razmišljanja s obzirom na razvoj učeničkog razumijevanja geometrije. Usiskin (1982:4) je sumirao četiri važne karakteristike teorije kako slijedi:

- **fiksni poredak (fix order)** - Poredak u kojem učenici napreduju kroz razine razmišljanja je invarijantan. Drugim riječima, učenik ne može biti na razini *n* ako nije prošao kroz razinu *n-1*.
- **susjedstvo (adjacency)** – Na svakoj razini razmišljanja koja je zapravo unutrašnjost prethodne razine postaje vanjština trenutne razine.
- **razlikovanje (distinction)** – Svaka razina ima svoje vlastite simbole i vlastitu mrežu odnosa koji povezuju te simbole.
- **odvajanje (separation)** – Dvije osobe koje promišljaju na različitim razinama ne mogu razumjeti jedna drugu.

Glavni razlog za neuspjeh tradicionalnog kurikuluma geometrije van Hieleovi pripisuju činjenici da je kurikulum predstavljan na višoj razini nego što su bili učenici; drugim riječima, učenici nisu razumjeli učitelja, a niti je učitelj mogao razumjeti zašto oni ne razumiju! Iako van Hieleova teorija razlikuje pet različitih razina razmišljanja, mi ćemo se ovdje usredotočiti na prve četiri razine zbog toga što su one najvažnije za srednjoškolsku geometriju. Opće karakteristike svake razine opisane su kako slijedi:

Razina 1: Prepoznavanje

Učenici vizualno prepoznaju likove u skladu s njihovim globalnim pojavljivanjem. Oni prepoznaju trokute, četverokute i tako dalje, prema njihovom obliku, ali oni ne znaju eksplicitno prepoznati svojstva tih likova.

Razina 2: Analiza

Učenici počinju analizu svojstva likova i uče prikladnu tehničku terminologiju za njihovo opisivanje, ali oni međusobno ne povezuju likove i svojstva likova.

Razina 3: Redoslijed

Učenici logički redaju svojstva likova pomoću kratkih lanaca zaključivanja i razumijevanja međusobnih odnosa između likova (npr. uključivanje klasa)

Razina 4: Zaključivanje

Učenici počinju razvijati duže nizove izjava i započinju razumijevati važnost zaključivanja, ulogu aksioma, poučaka i dokaza.

Potrebno je primijetiti kako u određenom smislu prijelaz iz Razine 1 prema Razini 2 uključuje prijelaz od neaktivno-slikovne uporabe pojmova prema više simboličkom, upotrebljavajući Brunerove obiteljske koncepte. Jednostavnije rečeno, dostignuće Razine 2 uključuje stjecanje tehničkog jezika kojim se svojstva pojmova mogu opisati. Međutim, prijelaz s Razine 1 na Razinu 2 uključuje i više od samo samog stjecanja jezika. To podrazumijeva prepoznavanje određenih novih odnosa između pojmova i usavršavanje i obnavljanje postojećih pojmova.

Kako bi učenik napredovao iz Razine 1 u Razinu 2 na određenom području (npr. četverokuti), mora se pojaviti značajan preuređenje odnosa i usavršavanje pojmova. To je zapravo mnogo više u ovom prijelazu nego samo verbaliziranje intuitivnog znanja; verbalizacija ide zajedno s restrukturiranjem znanja. Ovo restrukturiranje mora se pojaviti prije nego učenik započne istraživati logičke odnose između ovih svojstava na Razini 3. van Hiele to stavlja (1973:94) kako slijedi:

„Mreža odnosa na Razini 3 može značajnije biti uspostavljena, tek kad je mreža odnosa na Razini 2 odgovarajuće postavljena. Kada je druga mreža odnosa prisutna u takvoj odgovarajućoj formi, tada njegova struktura postaje jasna i pojedinac može razgovarati o tome s drugima, i tek tada su temelji za Razinu 3 pripremljeni."

(Slobodan prijevod s nizozemskog jezika)

Razina 3 također predstavlja potpuno drukčiju mrežu odnosa od Razine 2. Mreža odnosa na Razini 2 uključuje *pridruživanje svojstava* vrstama likova i odnose među likovima u skladu s tim svojstvima, dok mreža odnosa na Razini 3 uključuje *logičke odnose* među svojstvima likova. Mreža odnosa na Razini 3 više se ne odnosi na konkretne, specifične likove, niti oni tvore okvir veza u kojem se propituje ima li navedeni lik pojedina svojstva. Tipično pitanje koje se postavlja Razini 3 jest: je li određeno svojstvo slijedi iz drugog ili se ono može zaključiti iz posebnog podskupa svojstava (drugim riječima: ono može biti uzeto kao definicija ili je poučak) ili su dvije definicije istovjetne.

Mreže odnosa za Prvu i Drugu Razinu razmišljanja su, dakle, prilično različite (van Hiele, 1973:90):

„Zaključivanje logičkog sustava pripada Trećoj Razini razmišljanja. Mreža odnosa, koji se baziraju na verbalnom opisivanju promatranih činjenica, pripadaju Drugoj Razini razmišljanja. Ovdje dvije razine imaju svoju vlastitu mrežu odnosa koje se razlikuju jedna od druge: jedno razmišljanje postoji u jednoj razini ili u drugoj."

Razlike između prve tri razine mogu se sumirati i prikazati u Tablici 1. u smislu predmeta i strukture razmišljanja na svakoj razini (prilagođeno iz Fuys et al, 1988:6).

Predmet razmišljanja	Individualne pojave	Klase pojava	Definicije klasa pojava
Struktura razmišljanja	• Vizualno prepoznavanje • Imenovanje • Vizualno sortiranje	Prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa	Uočavanje i formuliranje logičkih odnosa među svojstvima
Primjeri	• Svi paralelogrami idu zajedno jer svi „izgledaju isto" • Pravokutnici, kvadrati i rombovi nisu paralelogrami jer oni „ne izgledaju kao oni"	Četverokut ima: • 4 stranice • nasuprot. kutovi = • nasuprot. stranicama = • nasuprot. stranice // • dijagonale koje se sijeku; itd. Pravokutnik nije paralelogram s obzirom da ima kut od 90°, a paralelogram ga nema	• Nasuprot. stranice = povlači da su nasuprot. str. // • Nasuprot. str. // povlači da su nasuprot. stranice = • Nasuprotni kutovi = povlači da su nasuprot. stranice = • Dijagonale koje se sijeku podrazumijevaju centralnu simetriju (half-turn symmetry)

Tablica 1.

Koristeći intervjue utemeljene na zadatcima, Burger & Shaughnessy (1986) detaljnije su okarakterizirali 4 učeničke razine razmišljanja, i to kako slijedi:

Razina 1

1. Često koriste nevažna vizualna svojstva za identificiranje likova, za usporedbe, za klasificiranje i opisivanje.
2. Obično se vezuju za vizualne prototipove likova, i lako se dovedu u zabludu ovisno o orijentaciji likova.
3. Nemogućnost razmišljanja o beskonačnom broju varijacija na temu pojedinih tipova likova (npr. u smislu orijentacije i oblika).
4. Nedosljednost u klasificiranju likova; npr. upotrebljavajući neuobičajena ili nepravilna svojstva za razvrstavanje likova.
5. Nepotpuni opisi (definicije) likova uočavanjem potrebnih (često vizualnih) uvjeta kao dodatnih uvjeta.

Razina 2

1. Eksplicitna usporedba likova u smislu njihovih osnovnih svojstava.
2. Izbjegavanje uključivanja klasa među različitim klasama likova, npr. kvadrati i pravokutnici se smatraju razdvojenima.
3. Razvrstavanje likova s obzirom na samo jedno svojstvo, npr. svojstvo stranica, dok druga svojstva poput simetrije, kutova i dijagonala su ignorirana.
4. Neekonomična uporaba svojstava likova za njihovo opisivanje (definiranje), umjesto korištenja samo dovoljnih svojstava.
5. Eksplicitno odbacivanje definicija koje su ponudile druge osobe, npr. učitelji ili udžbenici, kako bi se koristile vlastite definicije.
6. Iskustveni pristup utvrđivanju istinitosti tvrdnji; npr. korištenje promatranja i mjerenja na temelju nekoliko crteža.

Razina 3

1. Definiranje ekonomičnosti, ispravne definicije za likove.
2. Sposobnost transformiranja nepotpunih definicija u potpune definicije i još neposrednije prihvaćanje i korištenje definicija novih pojmova.
3. Prihvaćanje različitih ekvivalentnih definicija za iste pojmove.
4. Hijerarhijska klasifikacija likova, npr. četverokuti.
5. Eksplicitno korištenje logičkog oblika *„ako ... onda"* u definiranju i korištenju pretpostavki, kao i implicitno korištenje logičkih pravila kao što su *modus ponens*.
6. Nesigurnost i nedostatak jasnoće s obzirom na pojedinačne funkcije aksioma, definicija i dokaza.

Razina 4

1. Razumijevanje pojedinačnih funkcija (uloga) aksioma, definicija i dokaza.
2. Spontano pretpostavljanje i samomotivirani pokušaji za deduktivnim dokazivanjem istih

Rusko istraživanje poučavanja geometrije

Geometrija je oduvijek činila izuzetno važan dio ruskog matematičkog kurikuluma u 19. i 20. stoljeću. Na ovu krasnu tradiciju u prošla dva stoljeća bez sumnje su utjecali (i odigrali značajnu ulogu) pokušaji nekolicine poznatih ruskih geometričara (poput Lobačevskog). Tradicionalno ruski kurikulum iz geometrije sadržavao je dvije faze: *intuitivne* faze za razrede od 1-5 i *fazu sistematizacije* (deduktivnu) od 6. razreda nadalje (12/13 godina).

U 60-tim godinama 20-og stoljeća ruski (sovjetski) istraživači su napravili opsežnu analizu intuinitivne faze i faze sistematizacije, kako bi pronašli odgovor na uznemirujuće pitanje: zašto učenici koji pokazuju dobar napredak u drugim školskim predmetima, a pokazuju mali napredak u geometriji. U njihovoj analizi van Hieleova teorija odigrala je značajnu ulogu. Tako na primjer, pronađeno je kako je na kraju 5. razreda (prije nastavka faze sistematizacije, koja zahtijeva najmanje Razinu 3, razinu razumijevanja) samo 10-15 % učenika bilo na Razini 2.

Glavni razlog za ovo je nedovoljna pozornost prema geometriji u osnovnoj školi. Na primjer, u prvih pet godina od učenika se očekivalo upoznavanje pretežno s aktivnostima iz Razine 1, sa samo 12-15 geometrijskih objekata (i pridruženom terminologijom).

Kao suprotnost, od učenika se očekivalo da već na prvim satovima u 6. razredu budu upoznati ne samo sa 100 novih objekata i terminologijom, nego da su i u stanju vladati sa Razinom 3, razinom razumijevanja. (Ili se učitelj vrlo često morao truditi predstaviti novo gradivo na tri različite razine i to istovremeno.) Nije ni čudo što su onda period od 1. do 5. razreda opisali kao „*produljeno vrijeme geometrijske neaktivnosti*"!

Rusi su nakon toga dizajnirali vrlo uspješan eksperimentalan kurikulum geometrije utemeljen na van Hieleovoj teoriji. Pronašli su kako je važan faktor bio neprekidno nizanje i razvijanje pojmova od prvog razreda. Kao što je navedeno u Wirszup-u (1976: 75-96), prosječan je učenik u 8. razredu eksperimentalnog kurikuluma geometrije pokazao isto ili bolje geometrijsko razumijevanje od učenika u 11. ili 12. razredu koji su radili po starom kurikulumu.

Osnovnoškolski kurikulum geometrije (razredna i predmetna nastava)

Paralele iz ruskog eksperimenta prema Južnoj Africi i ostalim zemljama su očite. U Južnoj Africi, imali smo pretrpan srednjoškolski geometrijski kurikulum s formalnom geometrijom, dok je se u osnovnoj školi obradilo relativno malo neformalnog sadržaja. U prosjeku, učenički rezultati u južnoafričkoj matrici (12 razreda) iz geometrije su daleko gori nego iz algebre. Zašto?

Van Hieleova teorija daje vrlo važno objašnjenje. Na primjer, istraživanje de Villiersa & Njisanea (1987) pokazalo je da se oko 45% ispitanih učenika u 12-om razredu u KwaZulu, zadržalo na Razini 2 ili nižoj, dok se za istraživanje podrazumijevalo da budu na Razini 3 ili višoj. Istu nisku van Hieleovu razinu imali su učenici srednje škole kad su provedena i druga istraživanja: Malana (1986), Smitah & de Villiersa (1990) i Govendera (1995). Posebno, prijelaz s Razine 1 na Razinu 2 predstavlja specifične probleme učenicima koji slušaju nastavu na stranom jeziku, s obzirom da to uključuje i usvajanje tehničke terminologije kojima svojstva likova moraju bili opisana i istražena. To zahtijeva dovoljno vremena, koje nije dostupno u trenutno pretrpanom srednjoškolskom kurikulumu.

Vrlo se jasno vidi kako bez obzira na količinu truda, elegantne metode poučavanja neće biti učinkovite u srednjim školama, ako se ne napravi učinkovita revizija osnovnoškolskog kurikuluma geometrije prema naputcima van Hieleovih. Budućnost srednjoškolske geometrije, dakle, ovisi konačno o osnovnoškolskoj geometriji!

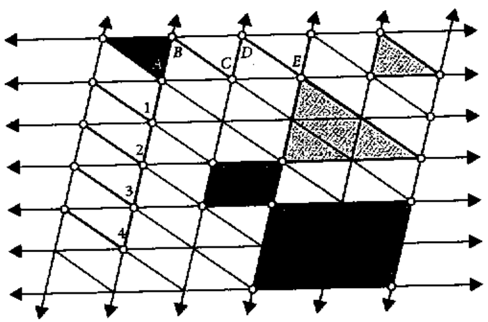
U Japanu, na primjer, učenici već u prvom razredu startaju s opsežnim tangramima, kao i s drugim ravninskim i prostornim istraživanjima (npr. vidi Nohda, 1992). Ovakva se praksa kontinuirano nastavlja tako da u petom razredu već formalno koriste pojmove sukladnosti i sličnosti, one iste koji se u Južnoj Africi tek predstavljaju u 8-om i 9-om razredu. Slično je i u Tajvanu, gdje se s geometrijom započinje rano, u studiji Wua & Maa (2006) je navedeno da je 28,3% učenika 6-tog razreda na van Hieleovoj Razini 3, dok je u Južnoj Africi takav postotak onih na istoj razini primijećen tek u 11-om razredu (de Villiers & Njisane, 1987; de Villiers, 1987). Nedavno su Feza & Webb (2005) pronašli da samo 5 od 30 (16,7%) učenika 7-og razreda koje su ispitali u Južnoj Africi, dostiglo van Hieleovu

Razinu 2. Stoga i ne čudi što u međunarodnim studijama japanski i tajvanski školarci nadmašuju rezultatima južnoafričke i druge školarce.

Iako je nedavno uvođenje popločavanja u južnoafričke osnovne škole prihvaćeno s odobravanjem, čini se kako mnogi učitelji i autori udžbenika ne razumiju njegovu važnost u odnosima s van Hielejevom teorijom. Iako popločavanje ima veliku estetsku privlačnost zahvaljujući svojim intrigantnim i umjetničkim uzorcima, osnovni je razlog za njegovo uvođenje u osnovnu školu taj da on pruža intuitivni vizualni temelj (van Hiele 1) za različit geometrijski sadržaj, koji se kasnije može tumačiti formalnije i u deduktivnom kontekstu.

Na primjer, u popločavanju s trokutima uzorci su prikazani na Slici 1, učenike se može pitati slijedeća pitanja:

1. identificirajte i obojite paralelne linije
2. što možete reći o kutovima A, B, C, D i E i zašto?
3. što možete reći o kutovima A, 1, 2, 3 i 4 i zašto?



Slika 1. Vizualizacija

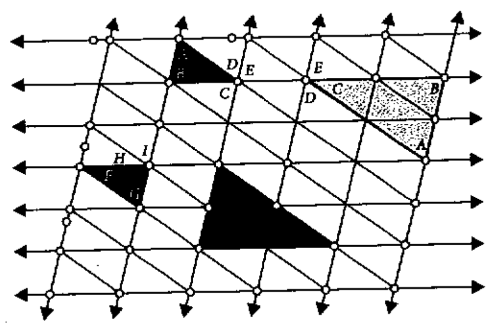
U takvim aktivnostima učenici će shvatiti kako su kutovi A, B, C, D i E svi jednaki s obzirom na rotaciju od 180° sivog trokuta oko središta dužine AB preslikavajući kut A u kut B itd.

Na ovaj način, učenicima se po prvi put mogu predočiti pojmovi „*pile*" ili „*cik-cak*" (naizmjenični kutovi). Slično, učenici bi trebali shvatiti kako su kutovi A, 1, 2, 3 i 4 jednaki s obzirom na translaciju sivog trokuta u smjeru kutova 1, 2, 3 i 4 uzastopno preslikavajući kut A na svaki od tih tri kuta. Na ovaj način, učenicima se po prvi put može predočiti pojam „ljestvi" (odgovarajućih kutova). Učenici bi trebali biti potaknuti na pronalaženje drukčijih pila i ljestvi u istom i drugima uzorcima popločavanja kako bi poboljšali svoje vizualne sposobnosti.

S obzirom na to kako svaka pločica mora biti identična i točno pristajati drugima, u smislu translacija, rotacija ili zrcaljenja, učenicima se može lako predočitiiti pojam sukladnosti. Također ih se može potaknuti neka potraže različite oblike u tim uzorcima popločavanja, npr. paralelograme, trapeze ili šesterokute. Isto ih se može ohrabriti neka potraže veće likove *istih oblika*, i na taj način im se intuitivno predočavaa pojam *sličnosti* (kao što je prikazano na Slici 1 dodavajući slične trokute i paralelograme)

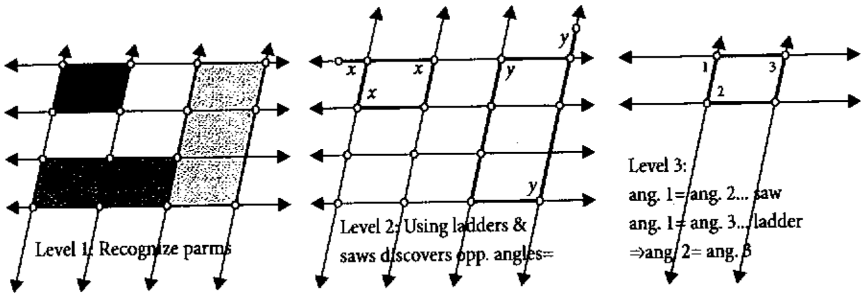
Popločavanje također pruža i zadovoljavajući kontekst za analiziranje svojstava geometrijskih likova (van Hiele 2), kao i njihovo logičko objašnjavanje (van Hiele 3). Na primjer, nakon što su učenici konstruirali uzorak trokutastih pločica, kao što je prikazano na Slici 2, može ih se pitati sljedeća pitanja:

1. Što možete reći o kutovima A i B u odnosu na D i E? Zašto? I što iz toga, dakle, možete zaključiti?
2. Što možete reći o kutovima F i G u odnosu na H i I? Zašto? I što iz toga, dakle, možete zaključiti?
3. Što možete reći o dužini JK u odnosu na dužinu LM? Zašto? I što iz toga, dakle, možete zaključiti?



Slika 2. Analiziranje

U prvom slučaju, učenici će opet vidjeti kako je kut A = kutu D s obzirom na oblik pile. Također je kut B = kutu E s obzirom na ljestve. Tada im je lako primijetiti s obzirom da tri kuta leže na istom pravcu, zbroj kutova u trokutu *ABC* mora biti jednaka ispruženom. Također mogu primijetiti kako je ovo istina za bilo koji vrh, kao i za trokut bilo koje veličine ili orijentacije, dakle, omogućavajući generalizaciju. U drugom slučaju, uvodi se poučak o vanjskom kutu, a u trećem poučak o polovištu. Takve analize su jasno mali odmak od standardnih geometrijskih objašnjenja (dokaza); sve ona sada trebaju neku formalizaciju. Na Slici 3, ilustrirane su tri razine za otkrivanje i objašnjavanje kako su nasuprotni kutovi paralelograma jednaki.

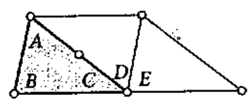


Slika 3. Tri razine

Pojmovno strukturiranje

Vrlo važno gledište (aspekt) van Hieleove teorije jest taj da ona naglašava kako će neformalne aktivnosti na Razinama 1 i 2 pružiti prikladne „pojmovne podstrukture" za formalne aktivnosti na sljedećim razinama. Premda različita, ova ideja je nešto sličnija ideji instrukcijske *građe (*instructional *scaffolding)* koju je promoviraoWood, Brunera & Rossa (1976).

Učitelji često svojim učenicima daju mjeriti kutove trokuta kutomjerom, i nakon toga im dopuštaju dodavati kutove (obično bez obzira na „devijaciju" kao posljedicu eksperimentalne pogreške) kako bi otkrili da je njihov zbroj uvijek 180°.

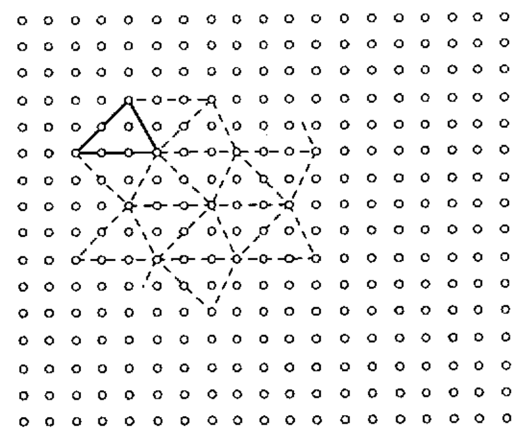


Slika 4.

Međutim, iz perspektive van Hieleovih to je potpuno neprikladno jer ne pruža prikladnu pojmovnu podstrukturu u kojoj bi moguća logička objašnjenja (dokazi) implicitno bila ugrađena. Za usporedbu, aktivnost s kartonskim pločicama ili sa *Sketchpadom* čemu se posvetio deVilliers (2003) pruža takvu podstrukturu. Na primjer, translatirajte tokut *ABC* za vektor *BC*, i rotirajte trokut *ABC* oko polovišta dužine *AC* (vidi sliku 4).

Dopustite učenicima primijetiti da putem vučenja tri kuta *C, D,* i *E* uvijek dobiju ispruženi kut. Tada ih upitajte što mogu reći o kutovima *A* i *B* u odnosu na kutove *D* i *E* u smislu transformacija koje su napravili. Kako se kut *B* preslikava u kut *E* translacijom i kut *A* u kut *D* pomoću poluokreta (rotacije za 180°/ centralne simetrije), kutovi *B* i *A* su jednaki kutovima *D* i *E.* Ovo jasno pruža mnogo više odgovarajuće pojmovne strukture za moguća objašnjenja (dokaze) nego kad učenici mjere neke kutove trokuta.

Slično, aktivnost mjerenja kutova osnovice jednakokračnog trokuta je pojmovno neprihvatljiva, ali preklapajući ih po osi simetrije dobiva se podloga za kasniji formalni dokaz. Isto važi i za istraživanje svojstava četverokuta. Na primjer, pojmovno je neprihvatljivo mjeriti nasuprotne kutove paralelograma kako bi otkrili da su zapravo jednaki. Puno je bolje dati im paralelogram da ga zarotiraju kako bi otkrili da se nasuprotni kutovi (i stranice) preslikavaju jedni u druge, i da to vrijedi za sve paralelograme te sadrži pojmovno uporište za formalni dokaz.



Slika 5. Korištenje mreže za izradu pločica

Nedavno sam imao razgovor s učiteljem koji je brzo odbacio kolegin uvod u popločavanje, jer je ovaj prvo dopustio učenicima raspakirati kartonske pločice. Ovaj je učitelj imao osjećaj da to proizvelo neuredne obrasce, da su bili neučinkoviti i da su potrošili vrijeme i da bi se u radu s učenicima trebalo započeti s pripremljenom kvadratnom ili trokutastom mrežom i pokazati učenicima kako tada mogu lagano nacrtati urednu mrežu za popločavanje (vidjeti sliku 5). Iako su takve mreže korisne i učinkovite za crtanje novih uzoraka, one su pojmovno izuzetno važne za učenike kako bi dobili fizičko iskustvo u raspakiravanju pločica, rotaciji, translaciji, zrcaljenju pločica koristeći svoje ruke (i na kraju pomoću softvera dinamične geometrije, ilustrirajući ili animirajući postojeće transformacije).

Prvi je problem to što je moguće nacrtati uzorak pločica na takvoj mreži bez imalo razumijevanja temeljne izometrije pomoću koje se i kreiraju, koje zauzvrat su pojmovno važne za analiziranje geometrijskih svojstava ugrađenih u uzorak, i konačno za njihovu formalizaciju u dokaze.

Još je važnije, prema Bruneru ova ***uređujuća (enactive)*** razina, gdje djeca izravno manipuliraju materijalima poput pločica, je osnovni preduvjet (kao što je i u van Hieleovoj teoriji), na ***slikovnoj (iconic)*** razini, gdje se djeca počinju susretati s mentalnim slikama objekata i više nije potrebno njima manipulirati izravno.

Definiranje i klasificiranje

Tradicionalno najveći broj učitelja i autora udžbenika su učenicima jednostavno dali pripremljeni sadržaj (definicije, teoremi, dokazi, klasifikacije, itd.) koje oni samo moraju usvojiti i ponoviti na testovima ili vježbama. Tradicionalno učenje geometrije na ovaj način može se usporediti sa satovima kuhanja ili pravljenja kolača gdje učitelji učenicima samo pokazuju kolače (ili još gore, samo slike kolača) bez objašnjavanja što ide u kolače i kako ih napraviti. Čak im nije dozvoljeno niti da sami pokušaju napraviti kolač!

Matematičari i matematički edukatori također često kritiziraju izravno poučavanje geometrijskih definicija bez naglaska na temeljne procese definiranja. Poznati matematičar Hans Freudenthal (1973:416-418) također jako kritizira tradicionalnu praksu objašnjavanja geometrije definicijama:

«... sokratovski didaktičari bi odbili uvesti geometrijske objekte definicijom, ali kadgod bi didaktička inverzija prevladala, deduktivno startaju s definicijom"

... gotovo sve definicije nisu unaprijed stvorene nego proizlaze kao završnica neke aktivnost. Učenik ne bi trebao biti lišen ove privilegije...Dobro poučavanje geometrije može štošta značiti – učiti kako organizirati predmetno gradivo i učiti što je organiziranje, učiti kako odrediti pojam i što je pojam, učiti definirati i što je definicija. To znači voditi učenike kako bi shvatili zašto je neko organiziranje, neki pojam, neka definicija bolja od nekih drugih."

Samo poznavanje definicije pojma uopće ne garantira razumijevanje pojma. Na primjer, iako je učenik možda bio poučavan, i u mogućnosti je izreći, standardnu definiciju paralelograma, a to je da je on četverokut s paralelnim nasuprotnim stranicama, učenik možda još uvijek ne smatra pravokutnike, kvadrate i rombove paralelogramima, s obzirom da u učeničkom poimanju slike paralelograma, nasuprotnim stranicama i kutovima nije dozvoljeno biti jednakima.

Prema van Hieleovoj teoriji razumijevanje formalnih, udžbeničkih definicija razvija se na Razini 3, stoga da će izravno pružanje takvih definicija učenicima na nižim razinama biti osuđeno na neuspjeh. Kao dodatak, ako konstruktivističku teoriju učenja uzmemo za ozbiljno (da znanje ne može biti direktno preneseno od jedne osobe k drugoj, i da smisleno znanje mora biti aktivno (re)konstruirano uz pomoć učitelja), učenici bi trebali biti uključeni u aktivnost definiranja i trebalo bi im dopustiti odabir njihovih vlastitih definicija na svakoj razini. Iz ovoga proizlazi dopuštanje slijedećih mogućih vrsta smislenog definiranja pravokutnika, na svakoj od van Hieleovih razina:

Van Hiele 1

Vizualne definicije; npr, pravokutnik je lik koji izgleda kao ovo (crta ili identificira četverokut sa svim kutovima od 90° i dvije dulje i dvije kraće stranice).

Van Hiele 2

Neekonomične definicije; npr, pravokutnik je četverokut s nasuprotnim stranicama paralelnima i jednakima, svim kutovima od 90°, jednakim dijagonalama, centralno je simetričan, s dvije osi simetrije kroz nasuprotne strane, dvije dulje i dvije kraće stranice, itd...

Van Hiele 3
Točna, ekonomična definicija; npr. pravokutnik je četverokut s dvije osi simetrije kroz nasuprotne stranice.

Hijerarhijske nasuprot djelomičnim definicijama

Iako su djeca u ranoj dobi sposobna razumijevati klasne zaključke poput *„mačke i psi su životinje"*, izgleda kako je znatno teže to postići s geometrijskim likovima. Najčešće, učenici neposredne definicije na van Hieleovoj Razini 1 i 2, kao što je navedeno gore, smatraju *djelomičnima*; drugim riječima, neće dopustiti zaključak o kvadratu među pravokutnicima (eksplicitno navodeći dvije dulje i dvije kraće stranice). Kao suprotnost tome, prema van Hieleovoj teoriji, definicije na Razini 3 su tipično *hijerarhijske*, što znači kako one dopuštaju zaključak o kvadratu među pravokutnicima, i neće biti jasne onim učenicima na nižim razinama.

U tradicionalnom poučavanju djeci se najčešće predočavaju pravokutnici, rombovi, paralelogrami, itd. kao „statični geometrijski objekti". Na primjer, pravokutnik bi mogao biti predočen usporedbom s oblikom vrata, ili statičnom slikom u knjizi, ali se vrata ili slika ne mogu transformirati u kvadrat (osim ako im se dijelovi odrežu). Tako je pojam pravokutnika od samog početka predočen kao pojam potpuno odvojen od kvadrata. Nažalost, ova djelomična klasifikacijska shema tada postaje utvrđena i ukorijenjena jednom za svagda, i otporna na svaku promjenu.

Pojmovne teškoće u geometrijskom klasnom zaključivanju je pokazao Mayberry (1981) koji je otkrio kako samo 3 od 19 učitelja matematike označavaju kvadrat kao pravokutnik kada ih se zatraži da ih označe na papiru punom pravokutnika. Ipak, moglo bi se s punim pravom kritizirati neka od pitanja koja je koristio Mayberry, kao i ona Usiskinova (1982) kako bi procijenio hijerarhijsko razmišljanje, jer niz različitih četverokuta učenici, kada bi ih se pitalo, mogli bi označiti samo kao opće četverokute (npr. kao opće paralelograme), jednostavno *ne znajući ili ne shvaćajući namjeru* pitanja da bi i sve specijalne slučajeve trebalo označiti (npr. pravokutnike, rombove, kvadrate).

U istraživanju koje su proveli de Villiers & Njisane (1987) na uzorku od 4000 učenika u KwaZulu (South Africa), ali modificiranim pitanjima za procjenu hijerarhijskog razmišljanja, uočen je mali napredak. Ipak, pronađeno je da se tek mali napredak pojavio u hijerarhijskom razmišljanju u razredima 9-12, i to s uspjehom u rasponu od 0,5% do 5,1% na 50% testova koji su procjenjivali hijerarhijsko razmišljanje. Ovo je u jasnoj suprotnosti s van Hieleovom Razinom 3 uspješnosti u jednostrukom i dvostrukom zaključivanju koja su se znatno popravila od 2,5% na 63,3% u 9-tom razredu i s 0,2% na 42,6% u 12-tom razredu.

Formalnim definicijama u udžbenicima na Razini 3 često prethode aktivnosti u kojima učenici moraju usporediti u tabličnom obliku različita svojstva četverokuta, a koja su pripremljena s namjerom da im pomogne kako bi uočili da kvadrat, pravokutnik i romb imaju svojstva paralelograma, ali se mogu promatrati kao specijalni slučajevi. Ipak, u de Villiersovim istraživanjima (1994) pokazalo se kako mnogo učenika, čak i nakon tablične usporedbe i drugih aktivnosti, ako im se pruži prilika, još uvijek preferira definirati četverokute u *dijelovima*. (Drugim riječima, oni će na primjer još uvijek radije definirati paralelogram kao četverokut s dva para međusobno paralelnih nasuprotnih stranica, ali ne i sa svim jednakim kutovima ili stranicama).

Zbog ovog razloga, čini se kako učenicima ne treba pružati gotove definicije četverokuta, nego im dopustiti formuliranje njihovih vlastitih definicija bez obzira jesu li one djelomične ili hijerarhijske. Ali razrednom diskusijom i uspoređivanjem relativnih prednosti i nedostataka oba načina klasificiranja i definiranja četverokuta (od kojih su oba matematički točna), učenici će možda shvatiti kako postoje određene prednosti u prihvaćanju hijerarhijske klasifikacije. Npr., ako učenike upitamo neka usporede sljedeće dvije definicije paralelograma, možda će shvatiti kako je prva **ekonomičnija** od druge:

hijerarhijska: Paralelogram je četverokut s dva para međusobno paralelnih nasuprotnih stranica.

djelomična: Paralelogram je četverokut s dva para međusobno paralelnih nasuprotnih stranica, ali ne i sa svim jednakim kutovima ili stranicama.

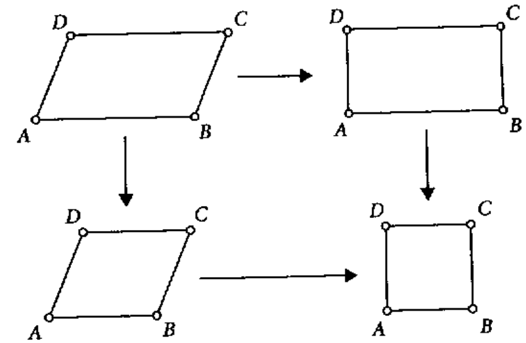
Jasno, djelomične definicije su dulje s obzirom na to da moraju uključiti dodatna svojstva kako bi isključile specijalne slučajeve. Još jedna prednost hijerarhijskog definiranja pojmova jest ta da svi dokazani poučci za taj pojam se automatski primjenjuju za sve njegove specijalne slučajeve. Na primjer, ako dokažemo kako dijagonale paralelograma raspolavljaju jedna drugu, odmah možemo zaključiti kako to isto vrijedi za pravokutnike, rombove i kvadrate.

Ako ih pak, klasificiramo i definiramo djelomično, moramo dokazati za svaki slučaj posebno (za paralelograme, pravokutnike, rombove i kvadrate) da se dijagonale raspolavljaju. Vrlo je jasno kako je to neekonomično. Jasno se čini da ukoliko uloga i funkcija hijerarhijske klasifikacije nije u razredu smisleno predočena, mnogi učenici će imati problema u shvaćanju zašto se njihove intuitivne, djelomične definicije ne koriste.

Privlačenjem učenika definiranju geometrijskih pojmova, poput onog za četverokut, imaju prilike naučiti kako konstruirati protuprimjere za nepotpune ili netočne definicije. Na primjer, kako bi bili u mogućnosti pokazati da je definiranje „*zmaja kao četverokuta s okomitim dijagonalama*" nepotpuno, ukoliko želimo pronaći četverokut s okomitim dijagonalama koji nije zmaj.

Jednu čestu teškoću imaju učenici u davanju ispravnog protuprimjera na nekompletne definicije,a to je obično opovrgavanje definicije pomoću specijalnih slučajeva. Na primjer, na netočnu definiciju „*pravokutnik je svaki četverokut sa sukladnim dijagonalama*", neki će učenici dati kvadrat kao protuprimjer. Ali očito jest kako kvadrat nije dobar protuprimjer jer je kvadrat i pravokutnik.

Dakle, učenici bi trebali imati razvijen smisao za razumijevanje hijerarhijske (zaključne) klasifikacije, već prije nego se priključe formalnom definiranju samih četverokuta (Craine & Rubenstein, 1993). Ovakav napredak se može napraviti upotrebljavajući softvere interaktivne geometrije, likove napravljene od fleksibilne žice ili s modelima četverokuta od papirnate trake. Zaista, radeći s grupom od 5 učenika šestogog razreda i pri tome koristeći žicu i papirnate modele, Malan (1986) je otkrio kako su svi na kraju bili sposobni uspješno napraviti hijerarhijsku klasifikaciju zaključaka o četverokutima.



Slika 6. Dinamična transformacija paralelograma

Konkretno, dinamična priroda geometrijskih likova konstruirana softverima, poput *Sketchpada,* mogla bi omogućiti znatno lakše prihvaćanje hijerarhijske klasifikacije četverokuta na nižim van Hieleovim razinama. Na primjer, ako učenici konstruiraju četverokut s paralelnim nasuprotnim stranicama, primijetit će kako ga lagano mogu odvući (pretvoriti) u likove poput pravokutnika, rombova ili četverokuta, kao što je pokazano na slici 6.

Zapravo, čini se izuzetno lako mogućim ovakvo učeničko prihvaćanje i razumijevanje, čak i na van Hieleovoj Razini 1 (Vizualizacija), ali je u ovom području potrebno daljnje istraživanje. Vrlo je moguće da su teškoće koje učenici imaju s hijerarhijskih klasnim zaključivanjem velikim dijelom rezultat tradicionalnog poučavanja, nešto što je već i primijetila Mayberry (1981:8) kada je zapisala: „Vrlo je razumljivo kako su promatrane razine tvorevine postojećeg kurikuluma ili uputa davanih učenicima..."

Autor je razvio eksperimentalnu java aplikaciju (pomoću *JavaSketchpada*) na http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/quadclassify.html gdje najčešći četverokuti nisu predočeni formalnim definiranjem, nego su jednostavno predočeni vizualno.

Putem vođenih povlačenja predviđa se da bi i dijete na Razini 1 moglo, na primjer, puno jednostavnije razviti *dinamički pojam slike* pravokutnika koji se može pretvoriti u kvadrat ako mu sve stranice postanu jednake. Učitelji i istraživači su pozvani neka istraže ove aktivnosti i svaki komentar ili izvještaj je dobrodošao.

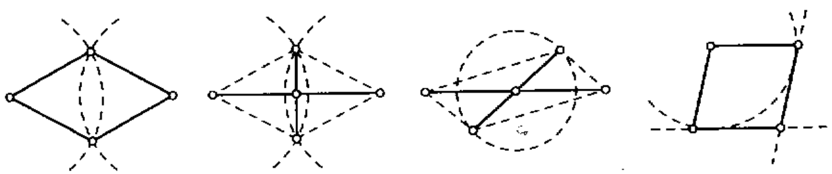
Konstruiranje i mjerenje

Prvo treba naglasiti kako su određene vrste konstrukcijskih aktivnosti (sa softverom dinamične geometrije ili olovkom i papirom) neprikladne na van Hieleovoj Razini 1. Na primjer, netko je slučajno čuo neki razgovor na konferenciji kako netko komentira da je bio neugodno zaprepašten koliko je maloj djeci teško konstruirati „dinamičan" četverokut pomoću *Sketchpada*. Ipak, ako su djeca bila na Razini 1, tada nije uopće iznenađujuće - kako mogu konstruirati kvadrat ako još ne poznaju njegova svojstva (Razina 2) i kako su neka svojstva suvišna, a neka nisu (to su logični odnosi među svojstvima - Razina 3).

Zapravo, na Razini 1 bilo bi daleko prihvatljivije djeci dati gotove sketcheve četverokuta napravljenih u softveru dinamične geometrije, kojima oni tada mogu lako manipulirati i po prvi put i vizualno istražiti. Nakon toga, mogu uporabiti alate softvera za mjerenje kako bi analizirali svojstva (i naučili prihvatljivu terminologiju) i dostigli Razinu 2. Tek tada bi im bilo prikladno dati zadatak da konstruiraju takve dinamične četverokute samostalno, i na taj način im pomoći prijeći na Razinu 3.

Drugim riječima, od učenika koji su pretežno na Razini 2 ne može se očekivati logičko provjeravanje vlastitih opisa (definicija) četverokuta, ali bi im se trebalo dopustiti s točnim konstrukcijama i mjerenjima. Na primjer, učenici bi trebali moći procijeniti sljedeće pokušaje opisivanja (definiranja) rombova konstruiranjem i mjerenjem kao što se i vidi na slici 7:

1. Romb je četverokut sa svim jednakim stranicama.
2. Romb je četverokut s okomitim dijagonalama koje se raspolavljaju .
3. Romb je četverokut s dijagonalama koje se raspolavljaju.
4. Romb je četverokut s jednakim susjednim stranicama i s dva para paralelnih nasuprotnih stranica



Slika 7. Konstruiranje i mjerenje

U prvom primjeru, učenici bi trebali konstruirati četverokut sa sve 4 jednake stranice, i tada bi trebali primijetiti kako se dijagonale uvijek raspolavljaju okomito, neovisno o tome kako ih povlače. To jasno pokazuje kako je svojstvo „*okomitih raspolavljajućih dijagonala*" posljedica njihove konstrukcije „sve četiri jednake stranice". S druge strane, takvo testiranje jasno pokazuje kada je objašnjenje (definicija) nepotpuno (koje sadrži nedostatna svojstva), kao što je u trećem primjeru gore.

Pojmovno, konstrukcije poput ovih su izuzetno važne za pomoć u prijelazu iz Razine 2 u Razinu 3. One pomažu razviti razumijevanje razlike između *premise* i *zaključka* i njihovog *kauzalnog* odnosa; drugim riječima, logičke strukture izjave „*ako-onda*". Na primjer, učenici tvrdnju 4 mogu zapisati kao: „**Ako** četverokut ima jedan par jednakih susjednih stranica i dva para paralelnih nasuprotnih stranica, **onda** je to romb (tj. ima sve četiri jednake stranice, okomite dijagonale koje se raspolavljaju, itd...)". Smith (1940) je izvijestio o napretku u učeničkom razumijevanju „ako-onda" izjava kada su napravili konstrukcije kako bi ocijenili sljedeće geometrijske izjave:

„Učenici su primijetili, kada naprave određene stvari na likovima, kako to rezultira nekim drugim stvarima. Naučili su osjetiti razliku u kategorijama između odnosa u koji oni ***stave*** *lik - kao stvar nad kojom oni imaju kontrolu - i odnosa koji* ***rezultira*** *bez akcije s njihove strane. Konačno ta razlika u te dvije kategorije bila je izazvana razlikom između* ***danih*** *uvjeta i* ***zaključka,*** *razlikom između ako-dijela i onda-dijela rečenice."*

Faza dokaza u geometrijskoj edukaciji

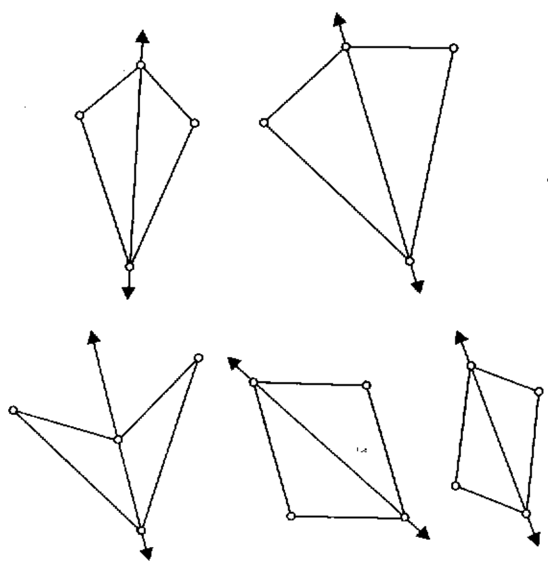
Prema van Hieleovoj teoriji, za suvislo učenje učenici bi trebali postupno upoznavati i istraživati geometrijski sadržaj u fazama koje odgovaraju van Hieleovim Razinama. Ozbiljan nedostatak van Hieleove teorije, ipak je nedostatak eksplicitne razlike između različitih mogućih funkcija dokaza. Na primjer, razvoj deduktivnog razmišljanja pojavljuje se prvo u kontekstu *sistematizacije* na Razini 3 (Redoslijed). De Villiersovo (1991) i Mudaly & de Villiersovo (2000) empirijsko istraživanje je izgleda pokazalo, kako funkcije dokaza poput *objašnjenja, otkrića i provjere* mogu biti značajne za učenike izvan konteksta sistematizacije, drugim riječima, u van Hieleovim Razinama i to ispod Razine 3, a pruženi argumenti su intuitivne ili vizualne prirode; npr. uporaba simetrije ili presjeka. Iz iskustva, ukoliko se oteže s uvođenjem dokaza na Razinama 1 i 2, to je uvođenje dokaza, kao značajne aktivnosti, kasnije još i teže.

U nastavku su četiri primjera aktivnosti podijeljena ne samo prema odgovarajućim van Hieleovim Razinama, nego uključujući i razlike među nekim različitim funkcijama dokaza na tim razinama.

Aktivnost 1: *Istraživanje svojstava „zmaja"*

U ovoj aktivnosti učenici koriste *Sketchpad* kako bi prvo konstruirali „zmaja" koristeći zrcaljenje i istražili njegova svojstva (npr, kutove, stranice, dijagonale, opisana kružnica). Povlačenjem, učenici također istražuju specijalne slučajeve (rombove, kvadrate).

- uključuje van Hieleovu Razinu 1 (vizualizaciju) i van Hieleovu Razinu 2 (analiziranje i formuliranje svojstava)
- osigurana je prilika za klasno zaključivanje o likovima koji se dobiju povlačenjem: rombovi i kvadrati
- svojstva „zmaja" su *objašnjena* (dokazana) u terminima reflektirajuće simetrije



Konstruiraj:

1. Nacrtaj dužinu kroz dvije točke i još jednu točku koja joj ne pripada.
2. Zrcali ne pripadajuću točku u odnosu na dužinu.
3. Spoji odgovarajuće točke kako bi tvorile četverokut, kao što je prikazano gore.

Istraži:

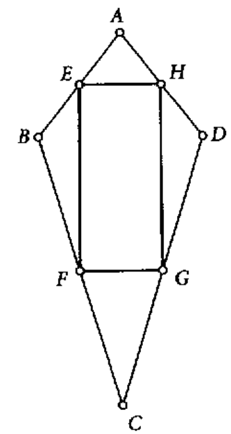
1. Napravi pretpostavke u odnosu na sjedeća svojstva gornjih likova:
   (a) stranica
   (b) kutova
   (c) dijagonala
   (d) upisane ili opisane kružnice
2. Mogu li gornji likovi nekada biti paralelogram, pravokutnik, romb ili kvadrat?
3. Logički objasnite vaše pretpostavke iz Pitanja 1 u pogledu simetrije.

Aktivnost 2: *Konstrukcija polovišta stranica „zmaja"*

Učenici konstruiraju polovišta stranica dinamičnog „zmaja" i istražuju kakve likove tvore (vodeći se do pretpostavke da je pravokutnik).

- Polovišta koja tvore pravokutnik su objašnjena u smislu okomitosti dijagonala, *otkrivajući* kako ovo može biti istinito za bilo koji četverokut s okomitim dijagonalama.

Konstruiraj i spoji polovišta stranica „zmaja".



1. Istraži vrstu četverokuta koji tvore polovišta njihovih stranica.
2. Logički objasni svoju pretpostavku.
3. Iz pitanja 2, možeš li naći/konstruirati još neki opći tip četverokuta koji će imati ista svojstva polovišta?

(Rezultat se odnosi na bilo koji četverokut s okomitim dijagonalama).

Aktivnost 3: *Opisivanje (definiranje) „zmaja"*

Učenici odabiru različite podskupove svojstava „zmaja" kao mogući opis (definiranje), i prvo provjeravaju jesu li im ona neophodna i dovoljna koristeći ih u konstrukciji sa *Sketchpadom*, i nakon toga logičkim zaključivanjem (dokazom).

- uključuje van Hieleovu Razinu 3 (lokalno određivanje redoslijeda)
- eksplicitnu funkciju dokaza ovdje u *sistematizaciji* (to je deduktivno organiziranje svojstava „zmaja")
- uključuje matematičke procese *deskriptivnog* definiranja

„Zmaj" ima sljedeća svojstva:

a. (Najmanje) jedan pravac simetrije kroz par nasuprotnih kutova.
b. Okomite dijagonale (s najmanje jednim raspolavljanjem).
c. (Najmanje) jednim parom jednakih nasuprotnih kutova.
d. Dva (vidljiva) para jednakih susjednih stranica.
e. (Najmanje) jednu dijagonalu koja raspolavlja nasuprotne kutove.
f. Upisanu kružnicu.

1. Kako biste telefonski opisali što je „zmaj" nekome tko se još nije s njime upoznao? (Pokušajte izreći što je moguće kraći opis, ali osigurajte sugovorniku minimum informacija za točnu konstrukciju četverokuta).
2. Pokušajte formulirati dva rezervna opisa. Koji vam se najviše sviđa? Zašto?

Rezultati studija Govender & de Villiers (2002), de Villiers (1998, 2004) i Sáenz-Ludlow & Athanasopoulou (2007) ukazuju na poboljšanja i pozitivne rezultate u učeničkom razumijevanju prirode definicija, kao i njihovu mogućnost definiranja geometrijskih pojmova kao što su četverokuti.

Aktivnost 4: *Generaliziranje (uopćavanje) ili specijaliziranje „zmaja"*

Učenici uopćavaju izostavljajući neke od svojstava i specijaliziraju dodajući više svojstava. Svojstva novodefiniranih objekata i nakon toga istraženih konstruiranjem pomoću *Sketchpada* i/ili deduktivnim zaključivanjem:

- uključuju van Hieleovu Razinu 4 (globalno određivanje redoslijeda)
- uključuje matematičke procese *konstruktivnog* definiranja

1. Generaliziranje pojma „zmaja" na različite načine izostavljajući, mijenjajući ili generalizirajući neka njegova svojstva.

   (Jedna od mogućnosti je generalizirati prema 2n-poligonu; npr. kao poligon s najmanje jednom osi simetrije kroz par nasuprotnih kutova. Druge su mogućnosti generalizirati kao četverokut s najmanje jednim parom jednakih susjednih stranica ili kao s dijagonalom koju druga raspolavlja ili kao opisan oko kružnice – upisani četverokut.)

2. Specijaliziranje pojma „zmaja" na različite načine dodavanjem više svojstava. (*Mogućnost razmatranja: „zmaj" upisan u kružnicu, „zmaj" s najmanje tri jednaka kuta ili kao „zmaj" s drugom osi simetrije kroz par nasuprotnih kutova - romb.*)

Gore kratko opisane aktivnosti imaju namjeru prikazati kako bi se učenici mogli uključiti u dokazivanje na razinama nižima od Razine 3. Primjeri razvijenijih dokaza i definiranja aktivnosti dostupni su u de Villiers (2003 & 2009).

Van Hieleove razine u drugim područjima

Svrha ovog dijela je dati nekoliko primjera primjene općih razina razmišljanja van Hieleovih na druga područja matematike.

Jednako van Hieleovim modelima za geometriju (van Hiele, 1973), sljedeće pretpostavljene razine razmišljanja za **Booleovu algebru** su nastale iz eksperimentalnog tečaja Booleove algebre koja je razvijena u razdoblju 1978 -1985 (de Villiers, 1986).

Razina 1 *(Interpretacija i prikaz komutacijskih krugova)*

Učenici su sposobni spojiti prekidače u serijske ili paralelne krugove prema dijagramskim prikazima, i obrnuto. Ali oni još nisu sposobni prepoznati niti označiti ijedno od svojstava komutacijskog kruga poput distributivnog svojstva, de Morganovih zakona, zakona apsorpcije, itd.

Razina 2 *(Analiza svojstava)*

Učenici sada počinju analizirati i postali su svjesni različitih strukturalnih svojstava komutacijskih krugova, i u mogućnosti su izraziti ih riječima ili označiti ih. Oni su u mogućnosti primijeniti ta svojstva u rješavanju praktičnih svojstava kao što su pojednostavnjivanje komutacijskih krugova ili dizajniranju novih. Ipak, na ovoj razini još uvijek nisu sposobni uvidjeti logičke odnose (implikacije) među različitim svojstvima. Značenje dokaza jedno je od *opravdanja*, npr. provjera valjanosti „ne-očitih" svojstava poput $f + \bar{f} \cdot g = f + g$ putem eksperimentalne provjere ili uzimanjem u obzir svih mogućnosti kroz ispunjavanje tablice istinitosti.

Razina 3 *(Logičke posljedice: dedukcija)*

Sada učenici postaju svjesni logičkih odnosa između različitih svojstava zamjene; drugim riječima, određena svojstva mogu biti izvedena iz drugih. Mogućnost izrade deduktivnih dokaza, aksiomizacija i sistematizacija i razvijanje shvaćanja važnosti aksioma, karakterizira ovu razinu. Dokaz sada podrazumijeva novo značenje, imenujmo to *sistematizacijom* matematičkih tvrdnji u logički sustav.

Kroz istraživanje razvoja učeničkog jezika za **opisivanje funkcija** i kroz povijest opisivanja gibanja i razvoj kalkulusa, Isoda (1996) je predložio sljedeće razine razmišljanja u „jeziku o funkcijama".

Razina 1 *(Razina svakodnevnog jezika)*

Učenici opisuju odnose u pojavama koristeći nerazumljiv svakodnevni jezik. Oni mogu diskutirati o promjenama u brojevima koristeći izračune, ali se obično njihovi opisi fokusiraju na fizički očite varijable, *zavisne varijable*. Čak i ako su svjesni kovarijacije, teško im je to prikladno objasniti koristeći dvije varijable, jer su njihovi opisi odnosa nerazumljivi, zbog uporabe svakodnevnog jezika. Tako im je teško pravilno uspoređivati zajedno različite pojave.

Razina 2 *(Razina aritmetike)*

Učenici opisuju pravila odnosa koristeći tablice. Tablice izrađuju i istražuju pomoću aritmetike. Njihovi opisi odnosa u pojavama su točniji uporabom tablica nego samo opisivanjem svakodnevnim jezikom na Razini 1. Učenici imaju opće pojmove o nekim pravilima odnosa, npr, proporcijama. Učenici mogu uspoređivati različite pojave koristeći takva pravila. Oni mogu opisati pravila odnosa kao kovarijaciju a kada čitaju tablice, njihova interpretacija kovarijacije varijabli je u najmanju ruku jaka kao njihova korespodentna interpretacija. Učenici mogu također koristiti formule i grafove za predstavljanje pravila i odnosa, ali im nije lako prevoditi između zapisa.

Razina 3 *(Razina algebre i geometrije)*

Učenici opisuju funkcije koristeći jednadžbe i grafove. Za istraživanje funkcija, prevode između tabličnog zapisa, jednadžbi i grafova i koriste algebru i geometriju. Na ovoj razini, njihovo zapisivanje funkcija, koje već dobro razumiju, uključuje predstavljanje različitog zapisivanja koje je već uključeno u njihovu mentalnu sliku. Na primjer, lako mogu pronaći jednadžbu koja nastaje iz grafa, i obrnuto.

Razina 4 *(Razina kalkulusa/računa)*

Učenici opisuju i istražuju ponašanje funkcija koristeći kalkulus. U kalkulusu, funkcije su opisane u smislu *deriviranih* ili *primitivnih* funkcija. Na primjer, kako bismo opisali svojstva funkcije, mi koristimo njezinu deriviranu funkciju (derivaciju), što je već naučeno. Teorija kalkulusa je generalizirana teorija ovakvog tipa opisivanja.

Razina 5 *(Razina analize)*

Za primjer jezika za opisivanje jest funkcionalna analiza, koja je metateorija kalkulusa. Potvrda za ovu razinu utemeljena je povijesnim razvojem i nije još istražena.

Sljedeće van Hieleove razine razumijevanja su zamišljene za **trigonometriju** s moje strane i strane studenta magisterija Jana Jugmohana, putem analogije s geometrijske razine, a kako bi služile kao mogući pravac učenja.

Razina 1 *(Vizualizacija)*

Učenik je u mogućnosti prepoznati pravokutni trokut različitih orijentacija i razlikovati između raznostraničnih i jednakokračnih pravokutnih trokuta i identificirati pravokutni trokut na kružnici. Prikazana je mogućnost ispravnog prepoznavanja nasuprotnih, susjednih, pravokutnih stranica različitih orijentacija, kao i hipotenuze pravokutnog trokuta.

Razina 2 *(Analiza)*

Učenik sada shvaća kako u pravokutnom trokutu, za zadani kut, omjeri između bilo koje dvije stranice ostaju isti, neovisno o veličini trokuta (što je pojam *sličnosti*). Obrnuto, razumijevajući inverznu funkciju razvijaju, npr. $\sin x = \frac{1}{2} \therefore x = ?$ Učenici su sada sposobni početi rješavati praktične i teorijske probleme pravokutnih trokuta koristeći trigonometrijske omjere.

Razina 3 *(Primitivna defiincija)*

Ranije spomenuta otkrića sada postaju formalizirana kao definicije u smislu omjera stranica u pravokutnom trokutu. Učenici razvijaju shvaćanje o rastućoj i padajućoj prirodi trigonometrijskih funkcija za kutove do 180°, kao i za pridružene inverzne funkcije.

Razina 4 *(Definicija na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici)*

Razumijevajući sažeto definiranje trigonometrije, kao funkcije u domeni realnih brojeva razvija se u smislu jedinične kružnice. Definicija na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici definira trigonometrijske funkcije u smislu koordinata x i y, i u suštini postaje neovisna o pravokutnom trokutu. Učenici razvijaju razumijevanje za *periodičnost* i *grafičko* predstavljanje trigonometrijskih funkcija, kao i trigonometrijske *identitete* kao sposobnost njihovog dokazivanja.

Razina 5 *(Sferna trigonometrija, itd.)*

Napredovanje se može proširiti dalje na sfernu trigonometriju i može se proširiti i na druge plohe, hiperboličke funkcije, npr. *sinh, cosh,* kao i na analitičku obradu trigonometrijskih funkcija kao transcedentnih funkcija, itd. Ovo može uključiti definicije trigonometrijskih funkcija kao različitih beskonačnih redova, kao i do primjene Fourierovih i drugih redova na različite dijelove matematike i fizike.

Land (1990) je razmatrao primjenu van Hieleove teorije na poučavanje **eksponencijalnih i logaritamskih funkcija**, i Nixon (2002) analogno zamišljene razine na poučavanje i razumijevanje nizova i redova. Iz analize povijesnog razvoja apstraktne algebre Nixon je zamislio sljedeće moguće spiralne putanje za učenja apstraktne algebre:

Razina 1 *(Percepcija)*

Fokus je na učenju različitih metoda za rješavanje određenih tipova jednadžbi, npr. linearnih, kvadratnih i kubnih polinoma pomoću uspoređivanja algoritama, faktorizacije, nadopunjavanje do kvadrata, itd.

Razina 2 *(Pojmovno)*

Ovdje je odmak od analiziranja metoda individualnih rješenja prema shvaćanju odnosa ili transformacije među njima. Na primjer, shvaćajući kako sve metode rješavanja, uključuju algebarsko reduciranje originalne jednadžbe i shvaćajući da na različite načine mogu biti permutirane, na ovoj su razini učenicima pristupačni kompleksna algebra, osnovni poučak algebre i Gaussov rad na kompoziciji oblika.

Razina 3 *(Apstraktno)*

Na ovoj razini, pojam grupe se može predstaviti kao način razumijevanja i organiziranja simetričnih polinoma, i razlikovanje na koji način su polinomske jednadžbe rješive algebarski. Prsteni i polja se sada mogu uvesti kao daljnji dodatak u načinima istraživanja i uspoređivanja različitih algebarskih struktura.

Literatura

1. Bruner, J.S. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* New York: Norton.
2. Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17(1), 31-48.
3. Craine, T.V. & Rubenstein, R.N. (1993). A Quadrilateral Hierarchy to Facilitate Learning in Geometry. *Mathematics Teacher* 86 (January), 30–36.

4. de Villiers, M.D. (1986). *Boolean Algebra at school.* University of Stellenbosch: RUMEUS.

5. de Villiers, M.D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele Theory: Some critical comments.* University of Stellenbosch: RUMEUS. (Available from: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf)

6. de Villiers, M.D. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras*, 26, 18-27. (Available from: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/needs.pdf)

7. de Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf)

8. de Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or teach to define? In Olivier, A. & Newstead, K. (Eds). *Proceedings of PME 22*, Vol 2, 248-255. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/define.htm)

9. de Villiers, M.D. (2003). *Rethinking Proof with Sketchpad 4.* Key Curriculum Press, USA.

10. de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *The International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 35(5), 703-724. (Available from http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf)

11. de Villiers, M. (2009). *Some Adventures in Euclidean Geometry.* Lulu Publishers. (Available for purchase as PDF from: http://www.lulu.com/content/7622884

12. Feza, N. & Webb. P. (2005). Assessment standards, van Hiele levels, and grade seven learners' understandings of geometry. *Pythagoras*, 62 (December), 36-47.

13. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

14. Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *JRME Monograph No. 3*, NCTM.

15. Govender, M. (1995). Pupils' proof-writing achievement in circle geometry. Unpublished B.Ed. dissertation, University of Durban-Westville.

16. Isoda, M. (1996). The development of the language of function: An application of van Hiele's levels. In Puig, L. & Gutierrez, A. *Proceedings of PME 20*, Vol. 3, 105-112.

17. Land, J.E. (1990). Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning. Ann Arbor, Mi. UMI Dissertation Services.

18. Mayberry, J.W. (1981). An Investigation of the van Hiele levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Unpublished doctoral dissertation, Univ. of Georgia, Athens.

19. Malan, F.R.P. (1986). Onderrigstrategieë vir die oorgang van partisie denke na hierargiese denke in die klassifikasie van vierhoeke: enkele gevallestudies. [Teaching strategies for the transition of partition thinking to hierarchical thinking in the classification of quadrilaterals.] (Internal report no. 3). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Research Unit of Mathematics Education (RUMEUS).

20. Mudaly, V. & de Villiers, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. Pythagoras, 52(August). 20-23. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf)

21. Nixon, E.G. (2002). An investigation of the influence of visualization, exploring patterns and generalization on thinking levels in the formation of concepts of sequences and series. Unpublished Masters thesis. Pretoria: UNISA.

22. Nixon, E.G. (2005). Creating and learning abstract algebra: Historical phases and conceptual levels. Unpublished DPhil Dissertation. Pretoria: UNISA.

23. Nohda, N. (1992). Geometry teaching in Japanese school mathematics. *Pythagoras*, 28, April, 18-25.

24. Sáenz-Ludlow, A. & Athanasopoulou, A. 2007. Investigating properties of isosceles trapezoids with the GSP: The case of a pre-service teacher. In Pugalee, D; Rogerson, A & Schinck, A, (Editors). *Proceedings*

of the 9th International Conference: Mathematics Education in a Global Community, University of North-Carolina, September 7-12, 2007, pp. 577-582. (Available from: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_SaenzLudlow-AthanasopoulouPaperEdit.pdf)

25. Smith, R. R. (1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. *The Mathematics Teacher*, 33, 99-134, 150-178.

26. The Mathematical Association of South Africa. (1978). *South African Mathematics Project: Syllabus Proposals*. Pretoria: MASA. (Now Wits: AMESA).

27. Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final report of the CDASSG Project. Chicago: Univ. of Chicago.

28. van Hiele, P. M. (1973). *Begrip & Inzicht*. Muusses: Purmerend.

29. Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Psychology and Psychiatry*. 17.

30. Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry. In J.L. Martin (Ed.). *Space and Geometry*. Columbus, Ohio: Eric Centre.

31. Wu, D. & Ma, H. (2006). The distribution of van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In Novotna, J. et al, *Proceedings of PME 30*, Vol 5, pp. 409-416. Prague: PME