# MEETKUNDE, VERKLARING EN INSIG

Michael de Villiers, ENWOUS, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600.

*"Proof, in its best instances, increases understanding by revealing the heart of the matter."*
-Philip Davis & Reuben Hersh

*"A good proof is one which makes us wiser."*
-Yu Manin

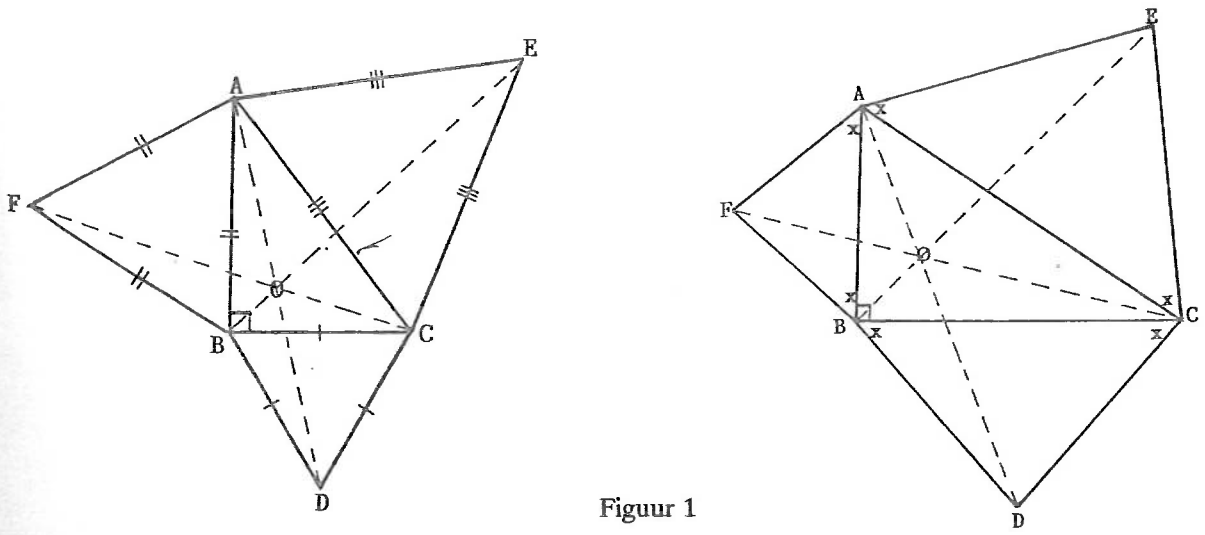
*"A good proof is expected to convey an insight into* why *the proposition is true."*
-Alan Bell

Baie in die styl van Martin Gardner se kolom "**Mathematical Games**" in die **Scientific American**, het ek in die vorige uitgawe van Pythagoras die twee resultate in Figuur 1 aan ons lesers bekendgestel, en hulle uitgedaag om vorendag te kom met logiese verklarings, asook ander veralgemenings. In die eerste figuur word gelyksydige driehoeke en in die tweede figuur word gelykbenig-gelykvormige driehoeke soos getoon op die sye van enige reghoekige driehoek gekonstrueer. Dan is FC, EB en DA in albei gevalle samelopend. Let ook op dat die tweede geval 'n veralgemening van die eersgenoemde is.

In die vorige uitgawe het ek ook verduidelik hoedat ek deur blote konstruksie en meting van 'n aantal gevalle sekerheid oor die geldigheid van beide resultate verkry het. Die probleem met so 'n empiriese benadering is egter dat dit 'n mens glad nie 'n bevredigende verklaring bied nie. Al teken 'n mens 'n duisend sketse, en vergroot dit 'n mens se sekerheid, verskaf dit nog geen insig oor *hoekom* dit so is nie. 'n Goeie deduktiewe bewys daarenteen kan hierdie funksie van verklaring vervul. (Soms kan 'n bloot intuïtiewe en/of logies-informele argument ook voldoende wees). Die rede hoekom ons bewyse vir bewerings in wiskunde skep, is dus dikwels nie soos in klaskamers verkondig, slegs om seker te maak nie, maar in baie gevalle veel eerder om groter insig teweeg te bring, asook te verklaar hoekom dit waar is. Trouens, binne die konteks van aanvangsmeetkunde op skool is baie van die bewerings so vanselfsprekend waar, dat die blote regverdiging daarvan deur middel van bewysvoering eintlik oorbodig is.

Ons is baie dankbaar vir 'n goeie reaksie van verskeie van ons lesers. Die eerste bewys wat ons ontvang het, was vir die eerste resultaat in Figuur 1 en is ingestuur deur Hennie Schutte, Dept. Wiskunde, U.S. Die sleutel tot sy logiese verklaring lê in die herkenning daarvan dat vierhoeke PBOA, RCOB en QAOC almal koordevierhoeke is (Kyk Figuur 4). Op navraag hoe hy agtergekom het dat dit koordevierhoeke is, het hy gesê dat hy waarskynlik daartoe gelei is omdat al ses hoeke by O in die oorspronklike tekening baie gelyk vertoon het, en dat elkeen van hulle dus $60^{o}$ was. Wat 'n mens verder uit sy bewys onmiddellik sien, is dat 'n mens nie die feit gebruik dat ABC 'n reghoekige driehoek is nie. Met ander woorde, ons kom tot die ongeantisipeerde gevolgtrekking dat die resultaat geldig vir enige driehoek ABC is.

Indien 'n mens nou egter sy bewysmetode probeer veralgemeen om die tweede geval in Figuur 1 (vermoedelik ook vir enige driehoek ABC) mee te bewys, vind 'n mens ongeëindig dat [illegible] FBOA,




Figuur 1

DCOB en EAOC slegs koordevierhoeke sal wees in die spesiale geval as $x = 60^0$ (d.w.s. as die driehoek gelyksydig is). Met ander woorde, in die tweede geval is vierhoeke FBOA, DCOB en EAOC in die algemeen nie koordevierhoeke nie, en sal ons dit dus nie in die bewys daarvan kan gebruik nie.

Hoewel ons met dank 'n *analitiese* bewys ontvang het vir die tweede geval vanaf Chris Schoombee, ook van die Dept. Wiskunde, U.S., gaan ons dit nie plaas nie en wel om redes soos reeds aangestip in die vorige uitgawe. Ons het egter 'n insiggewende bewys vir hierdie resultaat van Johan Meyer van die Dept. Wiskunde, U.O.V.S. ontvang, wat onder andere, gebaseer is op die konverse van die Stelling van Ceva (Kyk De Villiers, 1988). Wat veral mooi van hierdie resultaat en sy bewysmetode is, is dat die samelopendheid van die mediane en hoogtelyne van 'n driehoek direk as spesiale gevalle daaruit volg.

Laastens, het ons 'n produktiewe bydrae van Alwyn Olivier, Dept. Didaktiek, U.S. ontvang, waarin hy ook die eerste geval bewys het deur gebruik te maak van die onderliggende koordevierhoeke soos Hennie Schutte. Alwyn se bydrae is egter besonder waardevol, aangesien hy op 'n verhelderende wyse ook die heuristieke toon wat hy gebruik het, en hoe hy sy bewysmetode geanaliseer het om uiteindelik die eerste resultaat te veralgemeen na enige gelykvormige driehoeke wat op die sye van driehoek ABC gerangskik is soos in Figuur 9 getoon. (In die vorige uitgawe is dus foutiewelik vermeld dat die bewering nie geld vir gelykvormige driehoeke op die sye nie. Die bewering geld egter nie vir gelykvormige driehoeke op enige wyse op die sye gerangskik nie. Bestaan daar dalk ander maniere as Alwyn s'n om gelykvormige driehoeke op die sye te rangskik?) Verder toon sy bydrae ook die besondere krag van deduktiewe denke teenoor die beperkinge van 'n suiwer empiriese benadering: dit is byvoorbeeld redelik onwaarskynlik dat iemand bogenoemde resultaat op 'n uitsluitlik empiriese wyse sou ontdek het.

As spesiale gevalle van Alwyn se veralgemening kry ons ook baie mooi as 'n bonus die bekende samelopendheidstellings van driehoeke. Hennie Schutte se bewysmetode vir die eerste geval kan natuurlik ook gebruik word om Alwyn se veralgemening mee te bewys, maar dit word as 'n oefening aan die leser oorgelaat. Verder dien daar op gelet te word dat Alwyn se veralgemening en die veralgemening deur Johan Meyer bewys, twee heeltemal verskillende veralgemenings van dieselfde resultaat is, naamlik die geval vir gelyksydige driehoeke op die sye van enige driehoek. Wat die onderskeie bewysmetodes betref, is Johan Meyer s'n egter meer algemeen, aangesien sy metode ook gebruik kan word om Alwyn se veralgemening mee te bewys. Indien ons byvoorbeeld in Figuur 6 die sylengtes BR, RC, CS, SA, AT en TB onderskeidelik aandui met $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, $s_5$ en $s_6$, dan vind ons dat

$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = \frac{s_1}{s_2} \times \frac{s_3}{s_4} \times \frac{s_5}{s_6}$$

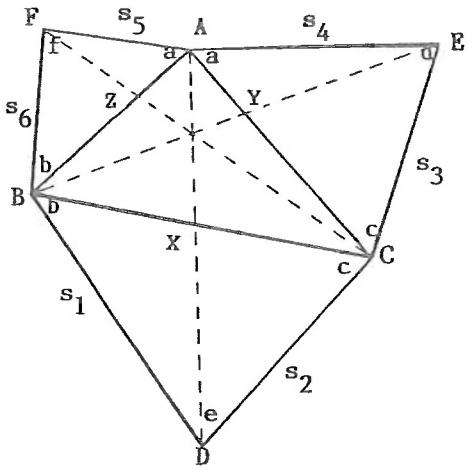
Die leser kan nou gerus self kontroleer dat dit dan vanuit die gelykvormigheid van driehoeke ATB, BRC en ASC volg dat laasgenoemde produk gelyk is aan 1, en volgens die konverse van die Stelling van Ceva, voltooi dit dan die bewys. Die driehoeke op die sye hoef egter nie gelykbenig-gelykvormig soos in die tweede geval, of gelykvormig te wees soos in Alwyn se veralgemening, vir die driehoeklyne om samelopend te wees nie. Met ander woorde, die voorwaardes is voldoende, maar nie nodig nie. In Figuur 2 word byvoorbeeld 'n veralgemening verskaf wat beide die vorige twee veralgemenings insluit, en waar geeneen van die drie driehoeke gelykbenig-gelykvormig of gelykvormig aan mekaar is nie. Om die resultaat te bewys, volg net soos hierbo dat

$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = \frac{s_1}{s_2} \times \frac{s_3}{s_4} \times \frac{s_5}{s_6}$$

Deur nou gebruik te maak van die sinusreël op elkeen van die driehoeke volg dat laasgenoemde produk gelyk is aan:

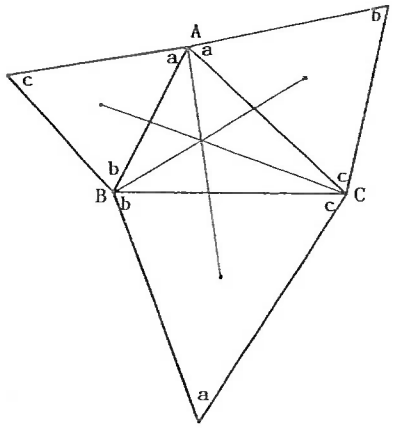
$$\frac{\sin c}{\sin b} \times \frac{\sin a}{\sin c} \times \frac{\sin b}{\sin a} = 1$$

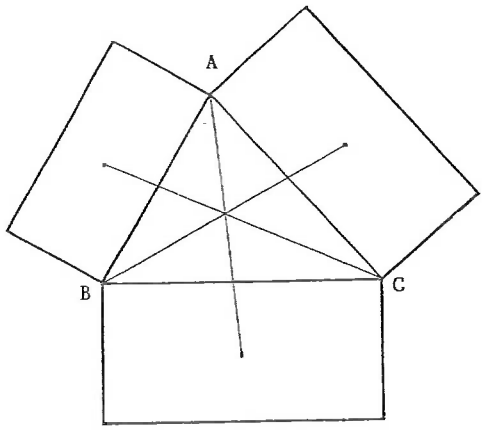
en dit voltooi die bewys. Die vraag is egter of daar nog verdere soortgelyke veralgemenings bestaan (met relatief eenvoudige voorwaardes). Een moontlikheid is om Johan Meyer se bewysmetode verder te veralgemeen, en dan 'n kombinasie van voorwaardes in terme van sye en hoeke te probeer ondersoek sodat bovermelde produk steeds gelyk aan 1 bly. 'n Ander moontlikheid is om sistematies verskillende gevalle met behulp van konstruksie en meting te ondersoek. Response van ons lesers in die verband sal verwelkom word.




Figuur 2

Bogenoemde veralgemenings het verder ook 'n klompie direkte toepassings op 'n paar ewe interessante resultate. In die eerste figuur in Figuur 3 word byvoorbeeld getoon dat die lyne wat die insenters van die gelykvormige driehoeke onderskeidelik met A, B en C verbind, ook samelopend is. Interessantheidshalwe, die veralgemening in Figuur 2 het ek eers ontdek by die beskouing en poging tot verklaring van hierdie resultaat. (Wat van die ortopunte, swaartepunte en omsenters van sodanige gelykvormige driehoeke en/of ander veralgemenings?) In die tweede figuur in Figuur 3 word weer getoon dat die lyne wat die swaartepunte van gelykvormige reghoeke met A, B en C verbind ook samelopend is. Trouens, laasgenoemde geld in die algemeen vir die swaartepunte van enige gelykvormige figure (ook nie-reglyniges) wat sodanig gekonstrueer is dat hulle simmetries lê met betrekking tot die middelloodlyne van die sye van driehoek ABC. Response deur lesers oor soortgelyke toepassings of verwante situasies met betrekking tot hierdie veralgemenings sal verwelkom word.



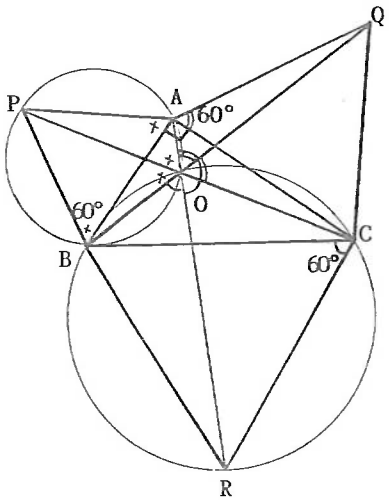

Figuur 3

Ten slotte, wil ons graag vra in hoe 'n mate word die opwinding en mooiheid van hipotesevorming, toetsing, veralgemening, regverdiging en verklaring wat in hierdie twee artikels uitgebeeld is, ooit in meetkunde-onderwys gereflekteer. Of word meetkundige bewerings slegs droogweg deur die onderwyser aangekondig, en onmiddellik opgevolg deur 'n bewys, asof die bewering en die bewys van nêrens, soos die spreekwoordelike hasie uit die hoed deur die kulkunstenaar, tevoorskyn gebring word?

Vervolgens word die bewyse deur die bovermelde persone verskaf.

**'n Bewys en veralgemening van die eerste geval.**

(Hennie Schutte, Dept. Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600.)



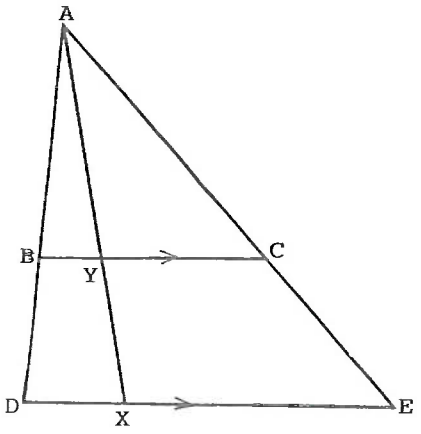

Figuur 4

**Gegee:**
Driehoek ABC met ∠A = 90° en gelyksydige driehoeke PAB, QCA en BCR.
**Te bewys:**
PC, QB en RA is saamlopend.
**Konstruksie:**
Trek omgeskrewe sirkels PAB en BCR om in B en O te sny. Verbind O met A, B, C, P, Q en R.
Bewys:
∠BOR = ∠BCR = 60° (omtrekshoeke op dieselfde koord). ∠BOA = 120° (BOAP is 'n koorde-vierhoek). Dus is AOR 'n reguit lyn. Netso is POC 'n reguit lyn.
Ook ∠AOC= 360° - (∠AOB + ∠BOC)
= 360° - (240°) = 120°
Dus is AOCQ 'n koordevierhoek. Soos in die gevalle AOR en POC volg nou dat BOQ 'n reguit lyn is.
**Opmerking:**
Aangesien ons nie die feit dat ∠A = 90° in bostaande bewys gebruik het nie, geld die bewering vir enige driehoek ABC.

**'n Bewys van 'n veralgemening van die eerste resultaat.**
(Johan Meyer, Dept. Wiskunde, U.O.V.S., Bloemfontein 9300.)

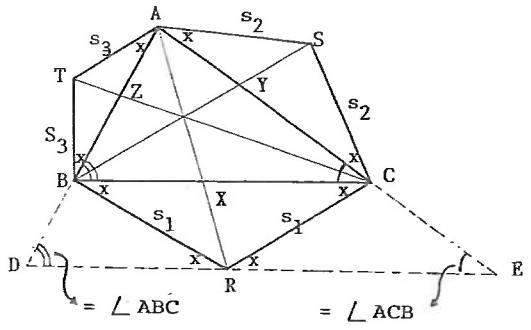
Daar word van die volgende stelling en die konverse van die Stelling van Ceva gebruik gemaak om die resultaat te bewys.

**Stelling 1:** Driehoek ABC word gegee. Verleng AB en AC na D en E onderskeidelik sodat DE//BC. Kies enige punt Y op BC en verleng AY tot by X op DE. Dan is BY/YC = DX/XE




Figuur 5

**Bewys:** Omdat driehoeke ABY en ADX gelykvormig is geld dat
BY/YA = DX/XA dus BY = (YA/XA).DX.
Omdat driehoeke ACY en AEX gelykvormig is, geld dat
CY/YA = EX/XA dus CY = (YA/XA).EX
Dus, BY/YC = DX/EX
Nou vir die gegewe probleem.
Gestel die drie lyne wat ons samelopend moet bewys , sny vir BC, CA en AB by X, Y en Z onderskeidelik. Verleng AB na D en AC na E sodat DRE//BE.




Figuur 6

Dan is ∠BDR = ∠ABC en ∠BRD = $x$. Dus, volgens die sinusreël is DR/sin(DBR) = $s_1$/sin(ABC),
met $s_1$ = BR = RC, d.w.s.
DR/sin($x$ + ∠ABC) = $s_1$/sin(ABC),
dus DR = $s_1$sin($x$ + ∠ABC)/sin (ABC).
Net so is RE = $s_1$sin($x$ + ∠ACB)/sin(ACB). Dus is:
BX/XC = DR/RE (stelling 1)

$$= \frac{\sin(x + \angle ABC)}{\sin(ABC)} \cdot \frac{\sin(ACB)}{\sin(x + \angle ACB)}$$

Op soortgelyke wyse volg dat

$$\frac{CY}{YA} = \frac{\sin(x + \angle ACB)}{\sin(ACB)} \cdot \frac{\sin(CAB)}{\sin(x + \angle CAB)}$$

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\sin(x + \angle CAB)}{\sin(CAB)} \cdot \frac{\sin(ABC)}{\sin(x + \angle ABC)}$$

Dus is

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

sodat AX, BY en CZ volgens die konverse van die Stelling van Ceva samelopend is. Maar dan is RA, SB en TC ook samelopend.
L.W.:

(i) Deur $x = 0°$ te neem, kry ons die stelling wat sê dat die mediane van 'n driehoek samelopend is.
(ii) Deur $x = 90°$ (in die limiet) te neem kry ons die stelling wat sê dat die hoogtelyne van 'n driehoek samelopend is.

Hierdie resultaat is dus 'n mooi veralgemening van hierdie bekende feite.

**'n Bewys en ander veralgemening van die eerste resultaat.**
(Alwyn Olivier, Dept. Didaktiek, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600).

Enige wiskundige of kwasi-wiskundige sou De Villiers se uitnodiging in **Pythagoras 20** om 'n meetkundige bewys (verklaring) en 'n veralgemening vir sy probleem te vind, as 'n uitdaging aanvaar het.

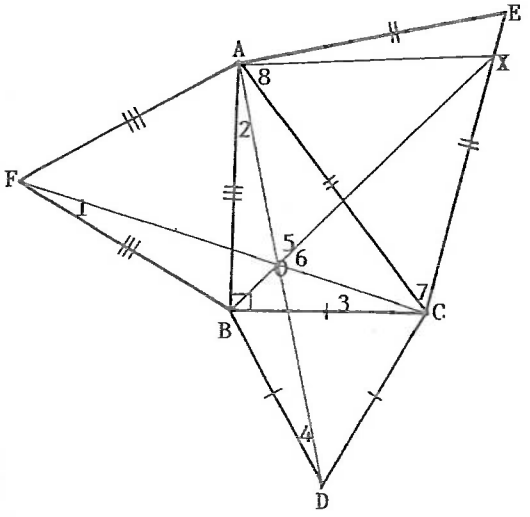
Die mees bevredigende verklaring vir my sou wees om aan te toon dat die drie samelopende lyne (kom ons noem hierdie lyne **driehoeklyne**) in werklikheid die hoogtelyne, mediane, halveerlyne van die hoeke of middelloodlyne van die sye van een of ander driehoek is, m.a.w. ek sou die onverwagte en verrassende resultaat wou verklaar in terme van bekende resultate. Ek het sulke driehoeke probeer konstrueer, maar sonder sukses.

In plaas van om 'n bekende resultaat te benut, kan 'n mens egter die **bewysmetode** van 'n soortgelyke probleem probeer gebruik. My aanvalsplan was dus

om, soos in die bekende bewys van die samelopendheid van die hoogtelyne van 'n driehoek, twee driehoeklyne te neem en dan te bewys dat die derde lyn ook 'n driehoeklyn is.

Laat in Figuur 7 die driehoeklyne AD en CF in O sny, en gestel BO gaan nie deur E nie, maar sny EC (of EA) in X. Verbind AX.

$\angle ABD = \angle FBC = 90° + 60°$ (1)
Dus is driehoeke ABC en FBC kongruent (s,h,s) (2)
Dus $\angle 1 = \angle 2$ en $\angle 3 = \angle 4$ (3)
Dus is AFBO en OBDC koordevierhoeke.




Figuur 7

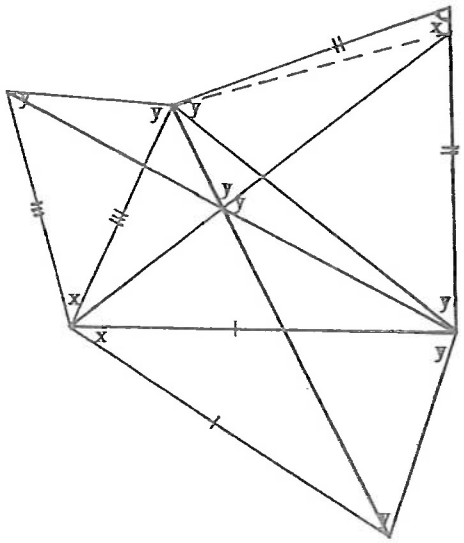
Dus is $\angle 5$ = 60° (buitehoek AFBO)
en $\angle 6$ = 60° (buitehoek OBDC)
Dus is $\angle 5 = \angle 6 = 60°$
Dus is $\angle 5 = \angle 7 = 60°$
Dus is AXCO 'n koordevierhoek.
Dus is $\angle 8 = \angle 6 = 60°$, wat onmoontlik is, want $\angle EAC = 60°$. Dus gaan BO deur E en is die drie driehoeklyne samelopend.

Die verklaring van die samelopendheid van die driehoeklyne lê dus in die drie aanliggende koordevierhoeke en in die 60° hoeke om O.

Soek 'n mens nou vir 'n veralgemening, volg daar direk uit die oplosmetode, sonder enige verdere denke oor die figure, dadelik 'n veralgemening. Die vraag is watter spesiale eienskappe van die figure essensieel is vir die bewys. Dit is duidelik dat die feit dat ABC 'n regte hoek is, slegs een keer gebruik word, naamlik in stap (1). Dit is duidelik dat selfs as $\angle ABC$ nie 'n regte hoek is nie, dit steeds geld dat $\angle ABD = \angle FBC$ en dat die res van die bewys net so geld. Ons het dus dadelik 'n geldige veralgemening:

*As gelyksydige driehoeke op die sye van* enige *driehoek getrek word, is die drie driehoeklyne samelopend.*

'n Mens wonder dan dadelik of hoekgroottes van 60° in stap (1) 'n nodige voorwaarde is. Die antwoord is nee. Ons kan $\angle ABD = \angle FBC$ behou en verder sorg dat die essensiële gelykhede in die bewys, en dus die hele bewys, steeds geldig bly, soos in Figuur 8 getoon. Ons het dus 'n tweede veralgemening dat die driehoeklyne in die geval van gelykvormige gelykbenige driehoeke soos getoon samelopend is.



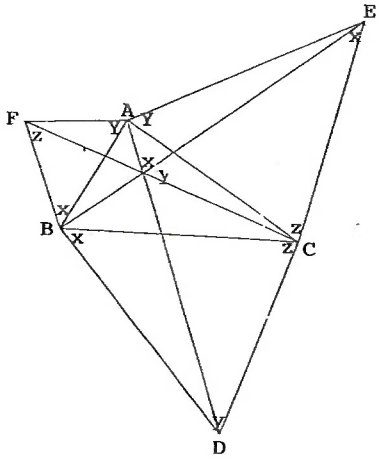

Figuur 8

Wonder 'n mens nou verder - *wat as dit nie gelykbenige driehoeke is nie?* Die essensiële in die bewys is die behoud van die drie koordevierhoeke, d.w.s. die behoud van die gelyke hoeke en nie noodwendig die behoud van die gelyke sye nie. Op die oog af lyk dit egter of die sleutel tot die gelyke hoeke in stap (3) slegs deur die kongruensie in stap (2), en dus deur gelyke sye, verkry kan word. Tog nie. Daar is 'n stelling, nie 'n skoolstelling nie (maar dit behoort te wees), wat die leser maklik sal bewys:

> *As in twee driehoeke twee pare sye eweredig is en die hoeke tussen die sye gelyk is, is die driehoeke gelykvormig.*

As ons nou gelykvormige driehoeke op die sye van enige driehoek trek, met die hoeke gerangskik soos in Figuur 9, kan m.b.v. bostaande stelling maklik bewys

word dat driehoeke ABD en FBC gelykvormig is, en volg die res van die bewys soos hierbo. Ons het dus 'n derde veralgemening, naamlik dat die driehoeklyne in die geval van gelykvormige driehoeke, soos getoon, samelopend is.

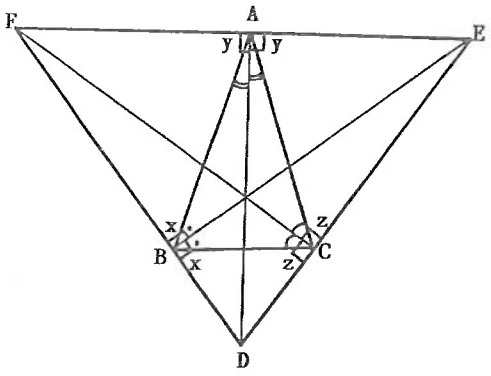



Figuur 9

Ek sou steeds hierdie interessante resultaat in verband wou bring met die bekende resultate van die samelopendheid van hoogtelyne, ens. van 'n driehoek. 'n Mens kan byvoorbeeld ondersoek onder watter voorwaardes die driehoeklyne in Figuur 9 die halveerlyne van driehoek ABC is. Dit word maklik afgelei dat die voorwaarde is dat

$x = ½(A + C)$,
$y = ½(B + C)$ en
$z = ½(A + B)$

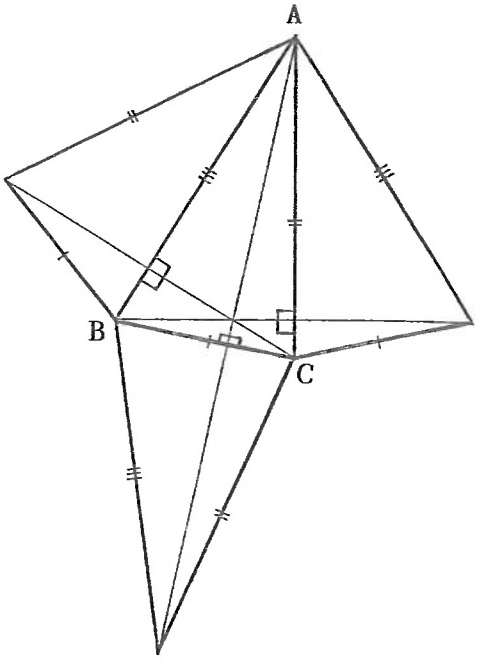
Dit volg dan verder dat FBD, DCE en EAF reguit lyne is, en boonop dat die driehoeklyne loodreg op hierdie lyne is, soos in Figuur 10 getoon. In hierdie geval is die drie driehoeklyne dus tegelyk die halveerlyne van die hoeke van driehoek ABC en die hoogtelyne van driehoek DEF, wat 'n dubbele verklaring bied.




Figuur 10

Soortgelyk kan aangetoon word dat in die spesiale geval van kongruente driehoeke op die sye van driehoek ABC, die driehoeklyne die hoogtelyne van driehoek ABC is (Figuur 11).

'n Mens eindig met die gevolgtrekking dat waar jy aanvanklik die driehoeklyne-resultaat wou verklaar in terme van die hoogtelyne en die halveerlyne van die hoeke van 'n driehoek, dit eintlik andersom is: die driehoeklyne-resultaat is die meer algemene resultaat, sodat die bekende samelopendheidstellings spesiale gevalle is van die samelopendheid van die driehoeklyne van 'n driehoek.




Figuur 11

## Verwysings


Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations. Educational Studies in Mathematics, 7, 23-40.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). The Mathematical Experience. London: Pelican Books.

De Villiers, M. (1988). What happens if? Why? Pythagoras, 18, Nov., 45-47.

De Villiers, M. (1989). Meetkunde, meting en intuïsie. Pythagoras, 20, Julie, 44-45.

Manin, Y.I. (1981). A digression on proof. The Two Year College Mathematics Journal, 12(2), 104-107.