Michael de Villiers (1996) E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Traducido por Martín Acosta

Algunos desarrollos en geometría contemporánea

La única geometría que la mayoría de gente conoce es la geometría euclidiana que aprendieron en el colegio. Es mas, parece existir la creencia de que los antiguos griegos y otras civilizaciones anteriores a ellos descubrieron toda la geometría conocida. Muy pocos se dan cuenta de que muchos de los resultados más interesantes de la geometría euclidiana se descubrieron en los siglos diecinueve y veinte, por ejemplo los teoremas de Morley, Miquel, Feuerbach, Steiner, etc. Aparte de eso, en el siglo pasado se desarrollaron las geometrías no euclidianas de Lobachevsky-Bolyai y Riemann. Los axiomas anti-intuitivos de esas dos geometrías revolucionaron completamente la comprensión de los matemáticos acerca de la naturaleza de los axiomas. Mientras muchos habían creído que los axiomas eran "*verdades evidentes*", ahora se daban cuenta de que simplemente eran "*puntos de partida necesarios*" para los sistemas matemáticos. Después de haber creído que las matemáticas trataban de "*verdades absolutas*" en relación con el mundo real, se dieron cuenta de que las matemáticas tratan de "*verdades proposicionales*" que pueden o no tener aplicaciones en el mundo real, y que realmente la aplicabilidad no era un criterio necesario para las matemáticas. En la Tabla 1 presentamos dos ejemplos de las geometrías de Lobachevsky-Bolyai y Riemann. Los modelos respectivos son los llamados disco de Poincaré y la geometría de la esfera.

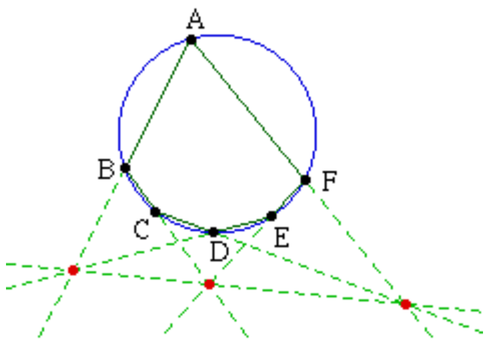
Lobachevsky-Bolyai	**Riemann**
Axioma (Adaptado): Por un punto P exterior a una recta r pueden trazarse al menos dos paralelas a r .	*Axioma (Adaptado): Por un punto P exterior a una recta r no puede trazarse ninguna paralela a r .*
Teorema: La suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180 grados y su área es proporcional al "defecto" de esta suma.	*Teorema: La suma de los ángulos de un triángulo es mayor a 180 grados y su área es proporcional al "exceso" de esta suma .*

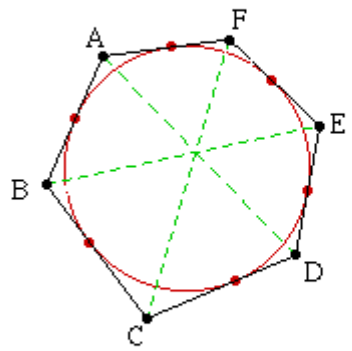
Tabla 1

El siglo pasado también vio el desarrollo axiomático de la geometría proyectiva cuyos orígenes se remontan a Papo (350 AC) y Desargues (1639). Un gran adelanto lo constituyó el descubrimiento y prueba del principio de *dualidad* de manera independiente por Poncelet, Plucker y Gergonne en 1826. Dos teoremas o configuraciones son llamados *duales* si uno puede obtenerse del otro remplazando cada concepto y operador por su concepto u operador dual. En geometría proyectiva encontramos la siguiente dualidad:

vértices (puntos) - lados (rectas)
inscritos en una circunferencia - circunscritos alrededor de una circunferencia
colineales - concurrentes

Esta dualidad se refleja de manera sorprendente en los teoremas de Pascal(1623 - 1662) y Brianchon (1785 - 1864) como sigue:





Teorema de Pascal
Si un hexágono está inscrito en una circunferencia entonces los tres puntos de intersección de los lados opuestos son colineales (están sobre una misma recta)

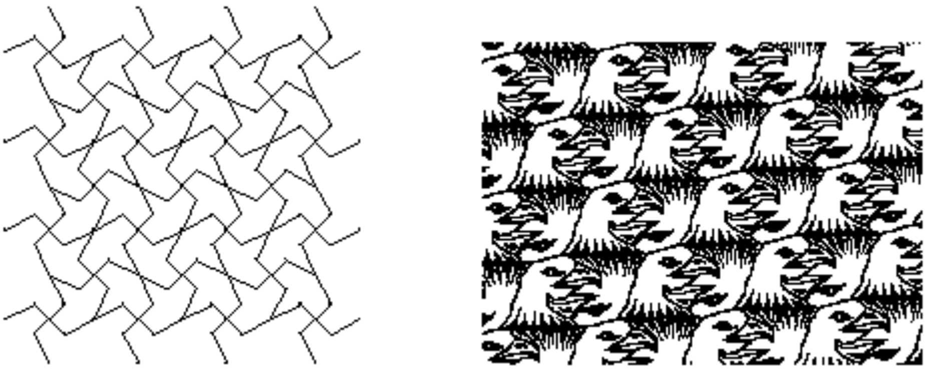
Teorema de Brianchon
Si un hexágono está circunscrito a una circunferencia, entonces las tres rectas (diagonales) que conectan los vértices opuestos son concurrentes (se cortan en un mismo punto)

Figura 1: Teoremas de Pascal & Brianchon

Aunque el tratamiento axiomático inicial de la geometría proyectiva era exclusivamente sintético, durante la segunda mitad del siglo pasado se desarrollaron métodos analíticos para su tratamiento. El más notable fue el famoso programa *Erlangen* de Klein (1872) que describe la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen *invariantes* (sin cambios) bajo varios grupos de transformaciones. En resumen, la geometría puede clasificarse de acuerdo con este planteamiento como sigue:

isometrías - transformaciones de figuras planas que preservan las distancias y los ángulos (congruencia)
semejanzas - transformaciones de figuras planas donde se preserva la forma (semejanza)
afinidades - transformaciones de figuras planas donde se preserva el paralelismo
proyectividades - transformaciones de figuras planas que preservan la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas
topologías - transformaciones de figuras planas que preservan el cerramiento y la orientacion

Desde tiempo inmemorial, los seres humanos han utilizado patrones geométricos de una y dos dimensiones para adornar sus viviendas, vestidos e implementos. La Figura 2a por ejemplo muestra un enlosado moro de la Alambra en el sur de España. El artista holandés Maurits Escher utilizó las teselaciones de manera extensiva en la producción de sus obras de arte en el período de 1937-1971 (ver Figura 2b para una teselación de Escher). Aunque parezca sorprendente, los matemáticos han dedicado una atención sin precedentes al estudio de las teselaciones y cenefas en el siglo veinte. No obstante, en los años setenta un ama de casa, Marjorie Rice, descubrió cuatro nuevos pentágonos convexos que teselan el plano, a pesar de que los matemáticos pensaban en ese momento que la lista de pentágonos que teselan el plano estaba completa (ver Schattschneider, 1981). Recientemente Grunbaum & Shepherd (1986) produjeron una investigación sistemática que en cierto grado es equiparable a los *Elementos* de Euclides.



(a) (b)

Figura 2: Ejemplos de teselaciones

Uno de los conceptos importantes en la clasificación de cenefas y teselaciones es el de *simetría*. Utilizando este concepto pueden clasificarse las cenefas en siete tipos diferentes y las teselaciones en diecisiete tipos diferentes. Una propiedad evidente de cualquier composición modular es la repetición de módulos. Si una composición modular tiene simetría traslacional en dos direcciones diferentes, es llamada *periódica*. Aunque las composiciones modulares más comunes son periódicas, sólo hace aproximadamente veinte años el matemático ingles Penrose descubrió un sorprendente grupo de dos cuadriláteros que teselan de manera no periódica (p.e ver Benade, 1995). En realidad, todavía es una pregunta abierta si existe una figura que pueda teselar de manera no periódica.

Otro desarrollo interesante de los últimos años es la geometría fractal, que consiste en el estudio de objetos geométricos de dimensiones fraccionarias. Una nube es un buen ejemplo de fractal. Aunque realmente no es tridimensional, con toda seguridad no es bidimensional; podríamos decir entonces que sus dimensiones están entre dos y tres. De hecho, muchos objetos reales como las líneas costeras, las hojas de helecho, las cadenas montañosas, los árboles, los cristales, etc. tienen propiedades fractales. La compresión fractal de imágenes se usa hoy en día en multimedia y aplicaciones de imágenes computarizadas. Una importante propiedad de los fractales es la *auto-semejanza* que aproximadamente quiere decir que cualquier subconjunto de la figura es semejante a la figura total. En la Figura 3 hay dos ejemplos de fractales donde se ilustra claramente esta propiedad.

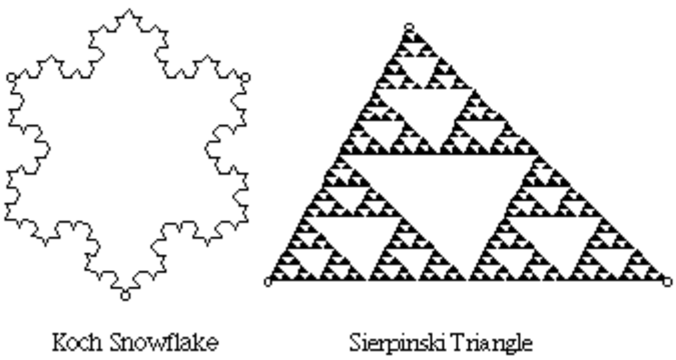


Figura 3: Ejemplos de fractales

En los últimos años también se ha desarrollado y ampliado la Teoría de Nudos y sus aplicaciones

a la biología, el uso de Geometría proyectiva para el diseño de programas de realidad virtual, la aplicación de la Teoría de Códigos para el diseño de unidades de CD, una investigación de la geometría sobre robótica, etc. Incluso la Geometría de las Bombas de Jabón está siendo estudiada y se le dedicó una sesión especial en la Burlington MathsFest en 1995. en 1986 Eugene Krause escribió un libro exquisito sobre la geometría de los Taxis, donde introduce un nuevo tipo de geometría no euclidiana. En la década pasada se llevaron a cabo varias conferencias internacionales de geometría. De hecho, David henderson de la Universidad de Cornell, Estados Unidos, le comentó al autor que actualmente tienen mas estudiantes de postgrado en geometría o campos relacionados con la geometría que en álgebra.
Incluso la geometría euclidiana está experimentando un renacer exitante en gran parte debido al desarrollo reciente del software de geometría dinámica como ***Cabri*** y ***Sketchpad***. En efecto, Philippe Davies (1995) describe un posible futuro prospero de la investigación en geometría del triángulo. Recientemente Adrian Oldknow (1995, 1996) por ejemplo utilizó *Sketchpad* para descubrir el hasta ahora desconocido resultado que establece que el centro de Soddy, el incentro y el punto de Gergonne de un triángulo son colineales (entre otros resultados interesantes). El centro de Soddy recibió ese nombre por el ganador del premio Nobel de Química, Frederick Soddy, quien publicó el siguiente resultado en 1936: Si se dibujan tres circunferencias con centros en los vértices de un triángulo y tangentes entre sí como se muestra en la Figura 4 (sólo existe una posibilidad de esta configuración en un triángulo), entonces existe una cuarta circunferencia tangente a las otras tres. (El centro de desa circunferencia se conoce ahora como centro (interior) de Soddy S - existe también uno exterior).

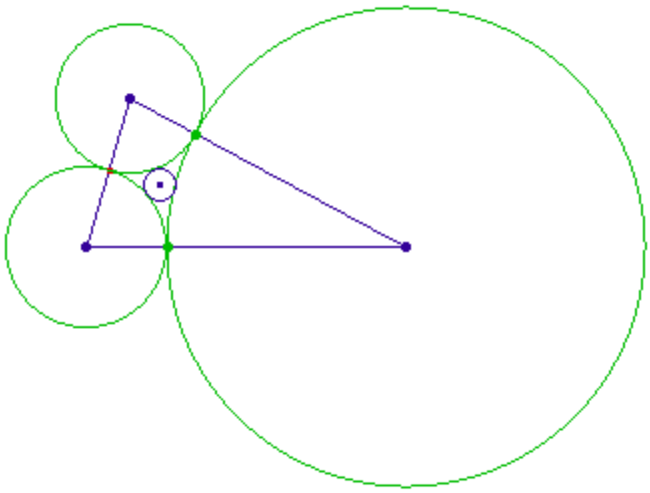
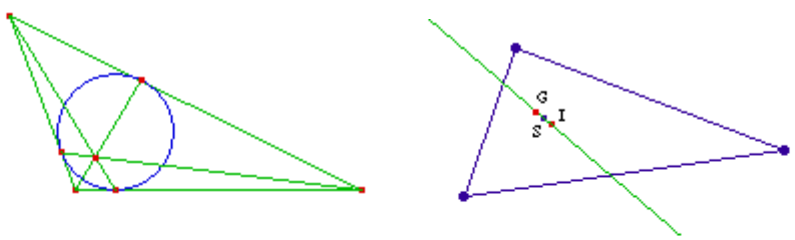


Figura 4: Centro de Soddy



(b)

(a)

Figura 5: Punto de Gergonne & Recta Gergonne-Soddy-Incentro

El punto Gergonne G de un triángulo es el punto de concurrencia de los tres segmentos que unen los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados opuestos (ver Figura 5a). (El punto de Gergonne casualmente es solo un caso especial degenerado del Teorema de Brianchon). Como muestra la Figura 5b, encontramos el sorprendente resultado que el punto de Gergonne, el centro de Soddy y el incentro están alineados. (El centro exterior de Soddy también queda sobre esa recta.).

El autor también descubrió recientemente dos generalizaciones interesantes del teorema de Von aubel utilizando software de geometría dinámica. Este teorema establece que si se construyen cuadrados en los lados de cualquier cuadrilátero entonces los segmentos que unen los centros de los cuadrados con los lados opuestos son siempre congruentes y perpendiculares (ver Yaglom, 1962 o Kelly, 1966). Luego de un poco de experimentación, el autor logró generalizar este resultado para rectángulos y rombos en los lados como se muestra enseguida (las demostraciones están en De Villiers, 1996 & In press). En la Figura 6, EG siempre es perpendicular a FH. También KM es congruente con LN donde K, L, M y N son los puntos medios de los segmentos que unen sol vértices adyacentes de rectángulos semejantes .

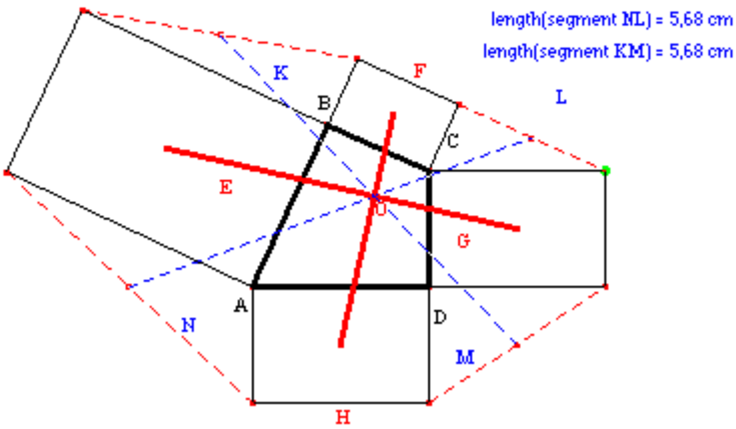
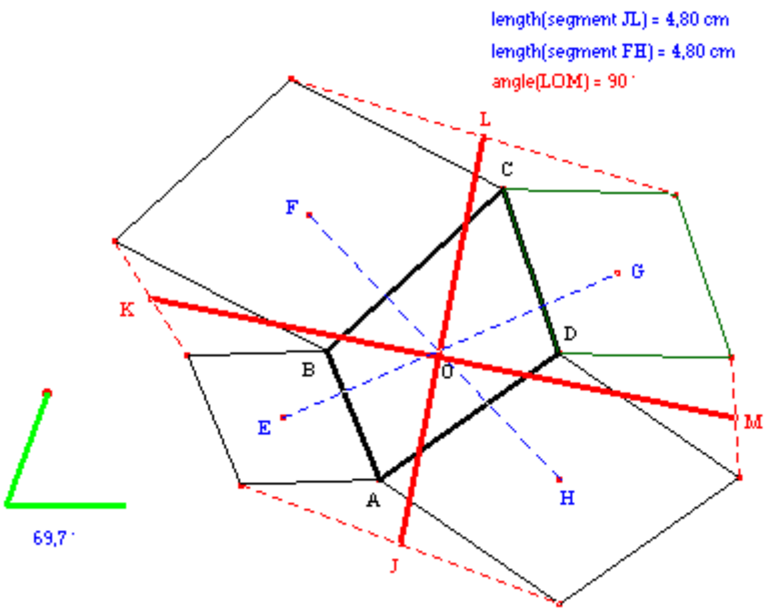


Figura 6

En la Figura 7, EG siempre es congruente con FH. Tambien KM es perpendicular a LN donde K, L, M y N son los puntos medios de los segmentos que unen los vértices adyacentes de rombos semejantes. La "intersección" de esos dos resultados es el teorema de Von Aubel.



generalización de Von Aubel con rombos

Figura 7

Tan sólo una breve revisión de algunos números recientes de revistas matemáticas como el *Mathematical Intelligencer* , *American Mathematical Monthly* , *The Mathematical Gazette* , *Mathematics Magazine* , *Mathematics & Informatics Quarterly*, etc. muestra la creciente actividad e interés en la tradicional geometría euclidiana. El Matemático Crelle dijo una vez: "*Es realmente maravilloso que una figura tan simple como el triángulo tenga tan gran número de propiedades*". Tal vez esto se aplique mucho mas a la geometría euclidiana en general!

Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.
Traducido por Martín Acosta

Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría(1)

La teoría de Van Hiele
Investigaciones Rusas sobre la enseñanza de la geometría
El currículo de geometría de la escuela primaria y secundaria

La teoría de Van Hiele

La teoría de Van Hiele tiene su origen en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y su esposo Pierre van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda en 1957. Desdichadamente Dina murió poco tiempo después de presentar su disertación, y Pierre fue quien desarrolló y difundió la teoría en publicaciones posteriores.
Mientras la disertación de Pierre trataba de explicar por qué los alumnos tienen problemas para aprender geometría (en este sentido era explicativa y descriptiva), la disertación de dina trataba de un experimento de enseñanza y en este sentido es más prescriptiva sobre el orden del contenido geométrico y las actividades de aprendizaje de los alumnos. La característica más obvia de la teoría es la distinción de cinco niveles de pensamiento con respecto al desarrollo de la comprensión geométrica de los alumnos. Enseguida presentamos cuatro importantes características de la teoría tal como las resume Usiskin (1982:4):

> orden fijo - El orden de progreso de los alumnos a lo largo de los niveles de pensamiento es invariante. En otras palabras, un alumno no puede alcanzar el nivel *n* sin haber pasado por el nivel *n-1*.
>
> adyacencia - En cada nivel de pensamiento lo que era intrínseco en el nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.
>
> distinción - Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan esos símbolos.
>
> separación - Dos personas que razonan en niveles diferentes no pueden entenderse.

La principal razón de fracaso del currículo tradicional de geometría fue atribuida por los esposos Van Hiele al hecho de que el currículo se presentaba a un nivel mas alto del de los alumnos; ¡en otras palabras los alumnos no podían entender al profesor ni el profesor podía entender por qué no entendían! Aunque la teoría de Van Hiele distingue cinco niveles de pensamiento, aquí solo nos centraremos en los cuatro primeros ya que son los más pertinentes para la geometría en secundaria. Las características generales de cada nivel pueden describirse así:

> Nivel 1: Reconocimiento
> Los alumnos reconocen figuras visualmente por su apariencia global. Reconocen triángulos, cuadrados, paralelogramos, etc. por su forma, pero no identifican explícitamente las propiedades de estas figuras.
>
> Nivel 2: Análisis

Los alumnos comienzan a analizar las propiedades de las figuras y aprenden la terminología técnica apropiada para describirlas, pero no relacionan las figuras o las propiedades de las figuras.

Nivel 3: Ordenamiento

Los alumnos ordenan de manera lógica las propiedades de las figuras utilizando cadenas cortas de deducción y comprenden las relaciones entre las figuras (p.e. inclusión de clases).

Nivel 4: Deducción

Los alumnos comienzan a desarrollar secuencias mas largas de proposiciones y comienzan a comprender el significado de la deducción, el rol de los axiomas, los teoremas y las demostraciones.

Las diferencias entre los tres primeros niveles pueden resumirse como en la Tabla 2 en términos de los objetos y la estructura de pensamientos de cada nivel.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Objetos de pensamiento	*Figuras individuales*	*Clases de figuras*	*Definiciones de clases de figuras*
Estructura de pensamiento	Reconocimiento visual. Ordenamiento Visual	Reconocimiento de propiedades como características de clases	Reconocimiento y formulación de relaciones lógicas
Ejemplos	• Los paralelogramos van juntos porque "se ven iguales". • Los rectángulos, cuadrados y rombos no son paralelogramos porque "no se ven iguales"	Un paralelogramo tiene: • 4lados • ángulos opuestos = • lados opuestos = • lados opuestos // • Diagonales se bisecan etc. Un rectángulo no es un paralelogramo porque tiene ángulos de 90°	Lados opuestos = implican lados opuestos //. Lados opuestos // implican lados opuestos = ángulos opuestos = implican lados opuestos = Bisección de las diagonales implica simetría central.

Tabla 2

Utilizando entrevistas basadas en tareas, Burger & Shaughnessy (1986) determinaron el nivel de pensamiento de alumnos en los cuatro niveles así:

Nivel 1

(1) A menudo usan propiedades visuales irrelevantes para identificar figuras, para comparar, para clasificar y para describir.
(2) Generalmente se refieren a prototipos visuales de figuras, y se confunden fácilmente por la orientación de la figura.
(3) Una incapacidad para pensar en una variación infinita de un tipo particular de figura (p.e. en términos de orientación y forma)
(4) Clasificación inconsistente de figuras: por ejemplo, uso de propiedades no comunes o irrelevantes para clasificar las figuras.
(5) Descripciones (definiciones) incompletas de figuras al tomar condiciones necesarias (generalmente visuales) como condiciones necesarias.

Nivel 2

(1) Una comparación explícita de figuras en términos de sus propiedades.
(2) Evitación de inclusiones de clases entre diferentes clases de figuras, p.e. cuadrados y rectángulos se consideran disyuntos.
(3) Clasificación de figuras únicamente en términos de una propiedad, por ejemplo, propiedades de los lados, ignorando otras propiedades como simetrías, ángulos y diagonales.
(4) Exhibición de un uso no económico de las propiedades de las figuras para describirlas (definirlas), en lugar de usar las propiedades suficientes.
(5) Un rechazo explícito de definiciones dadas por otros, p.e. el profesor o el libro de texto, en favor de sus propias definiciones.
(6) Un enfoque empírico para establecer la verdad de una proposición, p. e. el uso de la observación y la medición de diferentes dibujos.

Nivel 3

(1) La formulación de definiciones económicas y correctas para las figuras.
(2) Una habilidad para transformar definiciones incompletas en definicio9nes completas y una aceptación y uso más espontáneos de definiciones para conceptos nuevos.
(3) La aceptación de definiciones diferentes equivalentes para el mismo concepto.
(4) La clasificación jerárquica de figuras, p.e. cuadriláteros.
(5) El uso explícito de la forma lógica "*Si...entonces*" en la formulación y tratamiento de conjeturas, así como el uso implícito de reglas lógicas como el *modus ponens*.
(6) Una incertidumbre y falta de claridad con respecto a la función de los axiomas, definiciones y demostraciones.

Nivel 4

(1) Comprensión de las funciones de los axiomas, definiciones y demostraciones.
(2) Producción espontánea de conjeturas y esfuerzos autónomos por verificarlas deductivamente.

Investigaciones Rusas en enseñanza de la geometría

La Geometría siempre ha formado una parte importante del currículo de matemáticas en Rusia en los siglos diecinueve y veinte. Esta soberbia tradición fue influenciada sin duda por (e instrumentalizada en) los logros de varios geómetras rusos en los dos siglos pasados. Tradicionalmente el currículo de geometría en Rusia consiste en dos fases, textualmente, una fase *intuitiva* para los grados 1 a 5 y una fase de *sistematización* (deductiva) a partir del grado 6 (12/13 años).

En los años sesenta los investigadores rusos emprendieron un análisis comprensivo de las fases intuitiva y de sistematización para encontrar respuestas a la pregunta de por qué los alumnos que mostraban un buen progreso en otros temas escolares, presentaban poco progreso en geometría. En su análisis, la teoría de Van Hiele tuvo gran peso. Por ejemplo, se encontró que al final del grado 5 (antes de comenzar la fase de sistematización que requiere por lo menos el nivel 3 de comprensión) solo 10-15% de los alumnos estaban en nivel 2. La principal razón para eso era la atención insuficiente a la geometría en la escuela primaria. Por ejemplo, en los primeros cinco años, los alumnos trabajaban sólo con 12-15 objetos geométricos (y su terminología asociada) principalmente en actividades de nivel 1. En contraste, en el primer tema tratado en el primer mes de grado 6, se esperaba que los alumnos trabajaran con 100 objetos y su terminología, y exigiéndoles el nivel 3 de comprensión. (O si no, el profesor debía tratar de introducir contenidos nuevos en tres niveles simultáneamente). No es sorprendente que hayan descrito el período entre grados 1 y 5 como un "*período prolongado de inactividad geométrica*".

En consecuencia los rusos diseñaron un curriculo experimental de geometría muy exitoso basado en la teoría de Van Hiele. Descubrieron que un factor importante era la secuencia y desarrollo continuos de conceptos desde el grado 1. Como fue reportado por Wirzup (1976: 75-96), el alumno promedio de Grado 8 del currículo experimental mostró igual o mejor comprensión geométrica que los de grado 11 y 12 del currículo antiguo.

El currículo de geometría en primaria y secundaria

Los paralelos entre la experiencia rusa y la de Sudáfrica son obvios. Nosotros todavía tenemos un currículo de geometría sobrecargado en la escuela secundaria con geometría formal, y con muy poco contenido informal en la primaria. (p.e. ¿cuanta semejanza o geometría de las circunferencias se hace en primaria?) De hecho, es sabido que el desempeño de los alumnos en geometría den grado 12 es peor que en álgebra. ¿Por qué?
La teoría de Van Hiele da una explicación importante. Por ejemplo, la investigación de De Villiers & Njisane (1987) mostró que cerca del 45% de alumnos negros en grado 12 en KwaZulu sólo había alcanzado Nivel 2 o menos, ¡mientras que el examen requería el nivel 3 o superior! Niveles bajos de Van Hiele similares fueron encontrados por Malan (1986), Smith & De Villiers (1990) y Govender (1995). en particular, la transición entre Nivel 1 y nivel 2 plantea problemas específicos para los que aprenden una segunda lengua, ya que implica la adquisición de terminología técnica para describir las propiedades de las figuras. Esto requiere bastante tiempo, y el currículo actual ya está sobrecargado.
Parece claro que ningún esfuerzo ni novedoso método de enseñanza en la secundaria tendrá éxito, amenos que emprendamos una revisión fundamental del currículo de geometría en primaria de acuerdo con las directivas de Van Hiele. ¡El futuro de la geometría en secundaria depende de la geometría en primaria!
En Japón por ejemplo los alumnos comienzan a trabajar en grado 1 con el tangram extendido, así como con otras figuras planas y espaciales (p.e. ver Nohda, 1992). Este esfuerzo continúa en los años siguientes de manera que en grado 5 ya están tratando de manera formal los conceptos de congruencia y semejanza, conceptos que en Sudáfrica solo se introducen en grados 8 y 9. No sorprende que en los últimos estudios internacionales comparativos, los alumnos japoneses hayan superado continuamente a los de los demás países. Aunque la reciente introducción de teselaciones en nuestras escuelas primarias es bienvenida, muchos de nuestros profesores y libros de texto no parecen comprender su importancia en relación con la teoría de Van Hiele. A pesar de que las teselaciones producen una atracción estética debido a sus patrones intrigantes y artísticamente placenteros, la razón fundamental para su introducción en primaria es que proveen un fundamento visual intuitivo (Van Hiele 1) para distintos contenidos geométricos que pueden ser tratados mas adelante de manera formal en un contexto deductivo.
Por ejemplo, en una teselación con patron triangular como la de la Figura 8, puede preguntarse a

los alumnos lo siguiente:

(1) identifique y coloree las rectas paralelas
(2) Qué puede decir de los ángulos A, B, C , D y E y por qué?
(3) qué puede decir de los ángulos A, 1, 2, 3 y 4 u por qué?

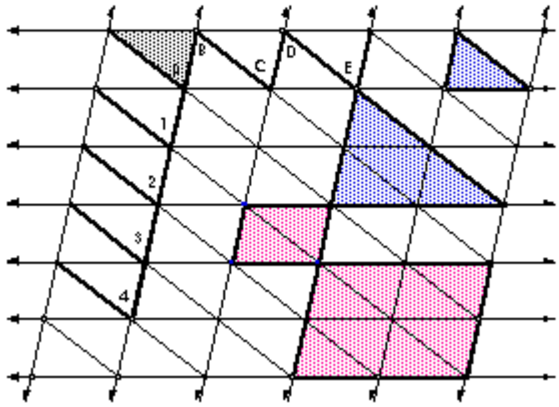


Figura 8: Visualización

En actividades como esta los alumnos comprenderán que los ángulos A, B, C, D y E son iguales porque al hacer una rotación de media vuelta del triangulo gris alrededor del punto medio del lado AB el ángulo A se superpone al ángulo B, etc. De esta forma pueden introducirse por priemra vez los conceptos de "sierras" o "zig-zags" (ángulos alternos). De igual manera, los alumnos deberían darse cuenta de que los ángulos A, 1, 2, 3 y 4 son iguales ya que una traslación del triángulo gris en dirección de los ángulos 1, 2, 3 y 4 hace coincidir conscutivamente el ángulo A con cada uno de los otros. De esta manera puede introducirse por primera vez el cocepto de "escaleras" (ángulos conrespondientes). Debe animarse luego a los alumnos a que encuentrendiferentes sierras y escaleras en esta teselación y en otras con patrones diferentes, para mejorar su habilidad de visualización.
Como cada módulo tiene que ser idéntico y puede coincidir con los otros por medio de traslaciones, rotaciones o simetrías, puede introducirse fácilmente el concepto de congruencia.También se le puede pedir a los alumnos que busquen diferentes formas en las teselaciones, p.e. paralelogramos, trapecios y hexagonos. También se les puede animar abuscar figuras mas grandes con la *misma forma*, para introducir de manera intuitiva el concepto de *semejanza* (como se muestra en la Figura 8 con los triángulos y paralelogramos sombreados). Las teselaciones tambien son un contexto apropiado para el análisis de las propiedades de las figuras geométricas (Van Hiele 2), así como su explicación lógicoa (Van Hiele 3). Por ejemplo, una vez que los alumnos hayan construido una teselación triangular como la de la Figura 9, se les pueden plantear preguntas como las siguientes:

(1) Qué puede decir de los ángulos A y B en relación con D y E? Por qué? Qué puede concluir de esto ?
(2) qué puede decir de los ángulos F y G en relación con los ángulos H e I? Por qué? Qué puede concluir de esto?
(3) qué puede deric del segmento JK en relación con el segmento LM? Por qué? que puede concluir de esto?

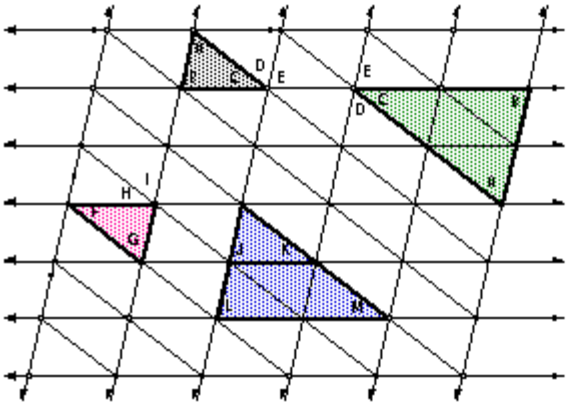


Figura 9: Análisis

En el primer caso los alumnos pueden ver de nuevo que el ángulo A= angulo B debido a la sierra que se forma. Tambien ánguloB= ángulo E debido a una escalera. Por lo tanto es fácil que observen que como esos tres ángulos quedan en una recta, la suma de los ángulos del triángulo ABC debe ser una línea recta. También pueden observar que esto es cierto en cualquier vértice, y para cualquier tamaño y posición del triángulo, posibilitando así una generalización. En el segundo caso, se introduce el teorema de los ángulos exteriores y en el tercer caso el teorema del punto medio. esos análisis están muy cerca de las explicaciones geométricas estandar (pruebas); sólo necesitan un poco de formalización. en la Figura 10 se ilutran los tres niveles para el descubrimiento y la explicación de que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

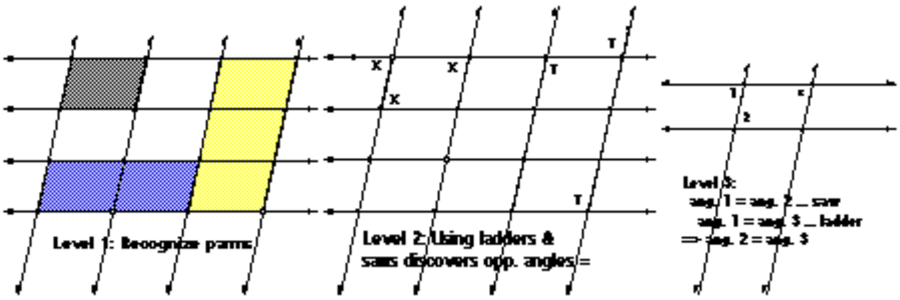


Figura 10: Tres niveles

Otro aspecto importante de la teoría de Van Hiele es que enfatiza que las actividades informales en los niveles 1 y 2 deberían constituir "*subestructuras conceptuales*" apropiadas para las actividades formales del siguiente nivel. Muchas veces he observado profesores y futuros profesores que piden a sus alumnos que midan y sumen los ángulos de un triángulo para descubrir que suman 180. Desde la perspectiva de Van Hiele esto es totalmente inadecuado ya que no provee una subestructura conceptual sobre la cual construir una prueba formal. Por el contrario, la actividad de teselación ya descrita provee esta subestructura. De manera similar, la

actividad de medir los ángulos de la base de un triángulo isósceles es conecptualemente inadecuada, pero doblarlo por su eje de simetría lleva a fundamentar una demostración posterior. Lo mismo se aplica a la investigación de las propiedades de los cuadriláteros. Por ejemplo, es conceptualmente indadecuado medir los ángulos opuestos de un paralelogramo para que los alumnos descubran que son iguales. Es mucho mejor pedirles que le den media vuelta para que descubran que los ángulos (y lados) opuestos coinciden, ya que esto se aplica a todos los paralelogramos y contiene las semillas para una demostración formal.
hace poco tuve una conversación con un profesor que descalifició rápidamente a un compañero suyo quien introdujo las teselaciones dejando que los alumnos empacaran tarjetas. Este profesor pensaba que esto producía patrones irregulares, era poco eficaz y consumía mucho tiempo, y que debería comenzarse entregando a los alumnos parrillas cuadradas o triangulares ya listas y mostrarles como pueden dibujar patrones de teselación regulares (ver Figura 11).
Aunque estas parrillas constituyen un medio útil y eficaz para dibujar patrones regulares, conceptualemtne es de extrema importancia que los alumnos tengan una experiencia previa de empacar físicamente módulos, vg rotar, trasladar, reflejar los módulos a mano. El problema es que es posible dibujar patrones de teselado en esas parrillas sin ninguna comprensión de las isometrías implícitas que los crean, que son concpetualemente importantes para el análisis de propiedades geométricas implicitas en el patrón.

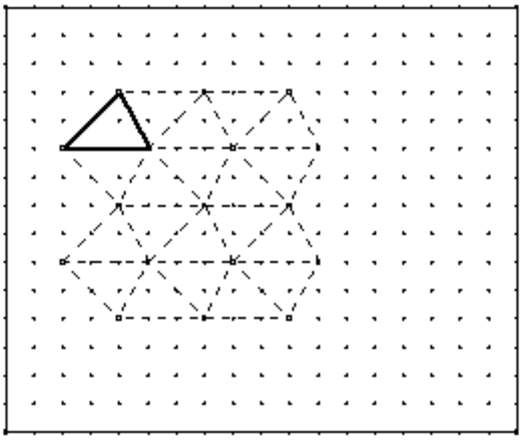


Figura 11: Utilización de parrillas

Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za

The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría(2)

Procesos vs productos en la enseñanza de la geometría
El experimento USEME

Procesos vs productos en la enseñanza de la geometría

La distinción entre "*procesos*" y "*productos*" en educación matemática es relativamente antigua. Aquí entendemos por producto el resultado final de alguna actividad matemática que lo precedía. Haciendo una retrospección hasta 1978, el Syllabus Proposals de la MASA sobre el Proyecto de Matemáticas de Sudáfrica, estableció:

> "*El valor intrínseco de las matemáticas no está contenido únicamente en los PRODUCTOS de la actividad matemática (p.e. conceptos acabados, definiciones, estructuras y sistemas axiomáticos) sino también y en especial en los PROCESOS de la ACTIVIDAD MATEMATICA que condujo a esos productos, p.e. generalizar, reconocer patrones, definir, axiomatizar. Los currículos propuestos intentan reflejar un énfasis mayor en la actividad matemática genuina como opuesta a la mera asimilación de los productos terminados de dicha actividad. Este énfasis se refleja especialmente en las distintas secciones de geometría*" - MASA (1978:3)

Lamentablemente estas buenas intenciones, exceptuando unas pocas escuelas, no fueron implementadas a gran escala en Sudáfrica. La mayoría de los profesores y libros de texto continuaron simplemente entregando a los alumnos contenido terminado que debían asimilar y regurgitar en las evaluaciones.

Este tipo de enseñanza tradicional de la geometría puede compararse a una clase de cocina donde el profesor solo muestra a sus alumnos los pasteles (o aun peor, fotos de pasteles) sin mostrarles qué hay dentro de ellos y cómo se hicieron. ¡Además, ni siquiera se les permite tratar de hacer los pasteles por sí mismos!

La distinción entre algunos de los principales procesos y productos de la geometría formal puede resumirse en la Tabla 3. La mayoría de los productos formales requiere en general una serie de procesos previos, de los cuales indicamos algunos. Los procesos de demostración también tienen su propio producto, una prueba, que debería distinguirse del teorema, definición o axioma al que se refiere.

Producto	Proceso

Axiomas	Axiomatizar - Demostrar
Definiciones	Definir - Experimentar - Demostrar
Teoremas	Encontrar y formular teoremas- Experimentar- refutar - encontrar patrones -generalizar - Especializar - visualizar- demostrar
Clasificaciones	Clasificar

Tabla 3

Debido a limitaciones de espacio, aquí sólo nos concentraremos en el tratamiento de definiciones del nivel de Van Hiele 3. La enseñanza directa de definiciones geométricas sin énfasis en los procesos subyacentes ha recibido críticas de matemáticos y educadores matemáticos por igual. Por ejemplo, ya en 1908 Benchara Blandford escribió (citado en Griffiths & Howson, 1974: 216-217):

> "*A mí me parece un método radicalmente vicioso, especialmente en geometría, si no en otros temas, entregar a los niños definiciones acabadas, para que las memoricen después de una explicación mas o menos cuidadosa. Hacer esto es con seguridad eliminar deliberadamente uno de los agentes más valiosos de la disciplina intelectual. El perfeccionar una definición de trabajo por la propia actividad del niño estimulándolo con preguntas adecuadas, es interesante y altamente educativo*"

El conocido matemático Hans Freudenthal (1973:417-418) también criticó la práctica tradicional de entregar definiciones geométricas así:

> "*... la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa. No debería privarse a los niños de este privilegio... Una buena enseñanza de la geometría puede significar más aprender a conceptualizar y aprender qué es conceptualizar; aprender a definir y aprender qué es una definición. Significa conducir a los alumnos a comprender por qué una cierta organización, un cierto concepto, una cierta definición es mejor que otra. La enseñanza tradicional es diferente. En lugar de darle la oportunidad al niño de organizar sus experiencias espaciales, el tema se le ofrece como una estructura preorganizada. Todos los conceptos, definiciones y deducciones son preconcebidas por el profesor, quien conoce su uso en el mínimo detalle - o por el autor del libro de texto que ha construido cuidadosamente todos sus secretos en esa estructura.*"

De nuestra discusión precedente de la teoría de Van Hiele debería estar claro que la comprensión de las definiciones formales en el nivel 3, y la entrega directa de definiciones a los alumnos en niveles inferiores está llamada al fracaso. En efecto, si tomamos en serio las teorías constructivistas del aprendizaje (a saber que el conocimiento simplemente no puede transferirse directamente de una persona a otra, y que el conocimiento significativo necesita ser (re)construido por el sujeto), incluso en el nivel 3 deberíamos implicar a los alumnos en la actividad de definir y permitirles escoger sus propias definiciones en cada nivel. Esto implica las siguientes clases de definiciones significativas en cada nivel:

Van Hiele 1
Definiciones v*isuales*, v.g. un rectángulo es un cuadrilátero con todos los ángulos de 90 y dos lados largos y dos cortos.

Van Hiele 2

Definiciones *no económicas*, v.g. un rectángulo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y congruentes, todos los ángulos de 90, diagonales congruentes, simetría central, dos ejes de simetría por lados opuestos, dos lados largos y dos cortos, etc.

Van Hiele 3

Definiciones *correctas y económicas v*.g. un rectángulo es un cuadrilátero con dos ejes de simetría por lados opuestos.

Como puede verse en los dos ejemplos en los niveles de Van Hiele 1 y 2, las definiciones espontáneas de los alumnos deberían tender también a ser *particionales,* en otras palabras, no deberían permitir la inclusión de cuadrados dentro de los rectángulos (estableciendo explícitamente dos lados cortos y dos largos). Por el contrario, de acuerdo con la teoría de Van Hiele, las definiciones en el nivel 3 deben ser *jerárquicas*, lo que quiere decir que permiten la inclusión de los cuadrados dentro de los rectángulos, y no serían comprensibles por alumnos de niveles inferiores.

La presentación de las definiciones formales en los libros de texto generalmente es precedida por una actividad en la que los alumnos deben comparar en una tabla distintas propiedades de los cuadriláteros, v.g. para ver que un cuadrado, rectángulo y rombo tienen todas las propiedades de un paralelogramo. El propósito evidente es prepararlos para las definiciones formales posteriores que son *jerárquicas*. (En otras palabras, las definiciones dadas prevén la inclusión de casos especiales, v.g. un paralelogramo se define de tal manera que incluya cuadrados, rombos y rectángulos). Sin embargo, la investigación reportada en De Villiers (1994) muestra que muchos alumnos, incluso después de comparaciones en tablas y otras actividades, si se les da la oportunidad, prefieren definir los cuadriláteros en *particiones*. (En otras palabras, preferirán por ejemplo definir un paralelogramo como un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos, pero no todos los ángulos o lados iguales). Un enfoque constructivista no presentaría directamente a los alumnos definiciones acabadas, sino que les permitiría formular sus propias definiciones independientemente de si son particionales o jerárquicas. Los alumnos pueden llegar a entender que hay ciertas ventajas en aceptar una clasificación jerárquica por medio de una discusión que compare en clase las ventajas y desventajas relativas de esas dos maneras de clasificar y definir cuadriláteros (que son ambas matemáticamente correctas). Por ejemplo, si se pide a los alumnos comparar las siguientes dos definiciones de paralelogramo, inmediatamente notarán que la primera es mucho más económica que la segunda.

jerárquica: Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.

particional: Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados paralelos pero no todos los ángulos o lados son iguales.

Es evidente que en general las definiciones particionales son más largas pues tienen que incluir propiedades adicionales para asegurar la exclusión de casos especiales. Otra ventaja de las definiciones jerárquicas para los conceptos es que todos los teoremas demostrados para un concepto se aplican automáticamente a sus casos especiales. Por ejemplo, si demostramos que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, podemos concluir inmediatamente que esto es cierto para los rectángulos, rombos y cuadrados. Si los hubiéramos definido particionalmente, tendríamos que demostrar separadamente para cada caso (paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados) que sus diagonales se bisecan. Esto no es económico, evidentemente. Parece claro que a menos que se discuta a fondo en clase el rol y la función de la clasificación jerárquica como fue descrito en De Villiers (1994), muchos alumnos tendrán dificultades para entender por qué no se usan sus definiciones particionales intuitivas.

El experimento USEME

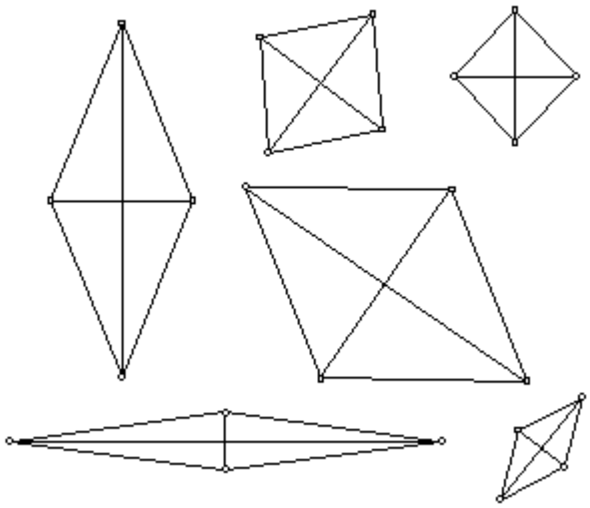
¿Es posible idear estrategias para enseñar los procesos de definir y axiomatizar en los niveles de Van Hiele 3 y 4? Este fue el punto central del Experimento en Educación Matemática de la Universidad de Stellenbosch (USEME por sus siglas en ingles) llevado a cabo con un grupo control en 1977 y un grupo experimental en 1978 (ver Human & Nel et al, 1989a). El experimento se dirigía al grado 10 y se realizó en 19 colegios de la Provincia Cape. Mientras que el enfoque tradicional se concentra exclusivamente en desarrollar habilidades para realizar demostraciones deductivas (especialmente en los ejercicios de aplicación), el enfoque experimental se proponía principalmente:

- desarrollar la habilidad de construir definiciones económicas formales para conceptos geométricos
- desarrollar la comprensión de la naturaleza y rol de los axiomas, definiciones y demostraciones.

El siguiente es un ejemplo de uno de los primeros ejercicios de definición usados en el enfoque experimental (ver Human & Nel et al, 1989b:21).

EJERCICIO

1(a) Haga una lista de todas las propiedades comunes de las siguientes figuras. Mire los ángulos, lados y diagonales y mida si es necesario.



(b) ¿Cómo se llama esta clase de cuadriláteros? (c) ¿cómo explicaría usted a alguien que no los conozca, qué son estos cuadriláteros *(sin hacer un dibujo)*?

La tendencia espontánea de casi todos los alumnos en (c) fue hacer una lista de todas las propiedades descubiertas en (a); esto es, dar una descripción (definición) correcta pero no económica de los rombos (revelando un nivel de comprensión 2). Esto condujo a los dos siguientes ejercicios que trataban de llevarlos a acortar sus descripciones (definiciones), por ejemplo:

EJERCICIO (continuación)

2. Una carta tiene el siguiente encabezado:

Mr. JH Nel
"Nelstevrede"
9 Venter Avenue
PO Box 48639
Stellenbosch
7600

(a) La dirección es innecesariamente larga. Escriba una versión mas corta de la dirección anterior de manera que la carta llegue al Sr. Nel (en Stellenbosch el correo llega a los apartados o a las casas)

(b) ¿Habría otras versiones cortas de la dirección que aseguren que la carta llegará al destinatario? Escriba todas las versiones cortas que pueda. Deben ser lo mas cortas posible.

3. (a) Construya tres rombos diferentes.

(b) Revise la descripción verbal que usted dio en 1(c). ¿Su descripción es innecesariamente larga? Si es el caso, de una descripción más corta del rombo que de todas maneras de un rombo si usted construye una figura de acuerdo con la información contenida en su descripción (corta): asegúrese que tendrá todas las propiedades de un rombo, aunque esas propiedades no se mencionen en su descripción corta.

(c) Escriba tres descripciones verbales cortas diferentes de un rombo.

(d) Trate de construir un cuadrilátero que no sea rombo, pero cumpla las condiciones de su primera descripción (corta) en (b). ¡Si puede hacerlo, su descripción no es una descripción precisa de un rombo! Verifique sus otras dos descripciones del rombo de la misma manera.

Aquí se le pidió explícitamente a los alumnos que acortaran sus descripciones (definiciones) de rombo dejando de lado algunas de sus propiedades. Por ejemplo, en 3(a) los alumnos encontraron que no es necesario usar todas las propiedades para construir un rombo. Podría obtenerse construyendo todos los lados iguales. En (b) y en (c) los alumnos típicamente obtuvieron diferentes versiones cortas, algunas de las cuales *estaban incompletas* (¡especialmente si se les promete un premio por hacerlas mas cortas!), por ejemplo: " *Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares*". Esto dio oportunidad para dar un contraejemplo y discutir la necesidad de contener suficiente información en la descripción (definición) para asegurar que alguien mas sepa exactamente de qué figura estamos hablando.

Con algunos estímulos, los alumnos produjeron diferentes posibilidades. Nótese que en este momento no se les pedía a los alumnos verificar lógicamente sus definiciones, sino por medio de construcciones y medidas precisas (en otras palabras una actividad típica de nivel 2). Por ejemplo, los alumnos debían construir figuras como las de la Figura 12 para evaluar definiciones como las siguientes:

(1) Un rombo es un cuadrilátero con todos los lados iguales
(2) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares que se bisecan
(3) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales que se bisecan
(4) Un rombo es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales.
(5) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares y un par de lados adyacentes iguales.

(6) Un rombo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales.

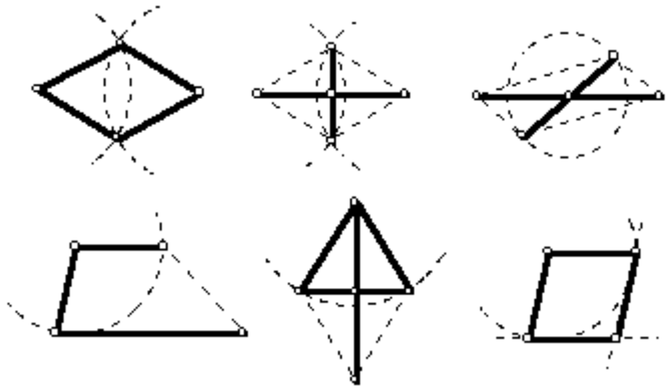


Figura 12: Construcción y medición

Psicológicamente, construcciones como esas son sumamente importantes para la transición de nivel 2 a nivel 3. Ayudan a desarrollar la comprensión de la diferencia entre *premisa* y *conclusión* y su relación *causal*; en otras palabras, de la estructura lógica de una proposición "*si-entonces*". Cada uno de los anteriores enunciados puede escribirse lógicamente de esa forma. Por ejemplo, el último enunciado podría reescribirse así: "Si un cuadrilátero tiene ambos pares de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales, entonces es un rombo (v.g. tiene lados iguales, diagonales perpendiculares que se bisecan, etc.)". Smith (1940) reportó una mejora marcada en la comprensión de los alumnos de enunciados "*si-entonces*" pidiéndoles que hicieran construcciones para evaluar enunciados geométricos como sigue:

> "*Los alumnos vieron que cuando ellos hacían ciertas cosas en la construcción de una figura, resultaban otras cosas. Aprendieron a sentir la diferencia de categoría entre las relaciones que ellos ponían en una figura -las cosas sobre las que tenían control- y las relaciones que resultaban sin ninguna acción de su parte. Finalmente la diferencia entre esas dos categorías fue asociada a la diferencia entre condiciones dadas y conclusión, entre la parte-si y la parte-entonces de una proposición.* "

Luego de algo de exploración experimental de diferentes definiciones de rombo como las descritas, comenzaron una fase deductiva donde los alumnos debían partir de una definición para verificar lógicamente si todas las propiedades podían derivarse de ella (como teoremas). Los mismos ejercicios se repitieron para los paralelogramos. Finalmente se explicaba a los alumnos que sería confuso si cada uno usara definiciones diferentes para los rombos y los paralelogramos, y se llegaba a un acuerdo para usar una definición para cada concepto. (Noten que el rol y la función de la clasificación jerárquica de los cuadriláteros no se había incluido de manera adecuada en el momento del experimento USEME, y fue una de las razones para un estudio posterior presentado en De Villiers (1994)).

Un error conceptual entre los alumnos (e incluso entre algunos de sus profesores y libros de texto) es creer que los axiomas son verdades *evidentes*, en lugar de puntos de partida necesarios para un sistema matemático. Un objetivo importante del proyecto USEME era lograr que los alumnos comprendieran la necesidad de las definiciones y axiomas permitiéndoles la experiencia en la que no todas las proposiciones dentro de un sistema formal pueden demostrarse sin llegar a un círculo vicioso, y por lo tanto uno tiene que aceptar algunas proposiciones como puntos de partida (Van Hiele Nivel 4). En lugar de presentar a los alumnos un sistema axiomático acabado, ellos debían realizar la sistematización como sigue (ver Human & Nel et al, 1989b: 43). (Nota: Aunque los alumnos en este momento conocían las propiedades de las rectas paralelas, no tenían una definición formal para las mismas ni habían deducido lógicamente ninguna de las propiedades. (Con anterioridad se había introducido la demostración como un medio de explicación de distintos ejercicios de aplicación interesantes).

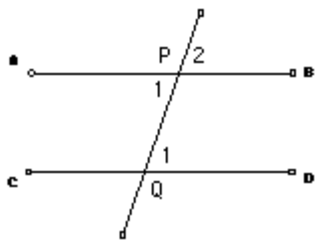
EJERCICIO

1. Trate de demostrar que si una transversal corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos son iguales. Haga uso de nuestras suposiciones sobre rectas paralelas (ángulos correspondientes iguales, ángulos co-interiorres suplementarios), y del teorema que establece que cuando dos rectas se cortan, los ángulos opuestos son iguales.

2. En su demostración en No1 utilizó algunas suposiciones. Ahora trate de demostrar esas suposiciones.

3. Una vez mas, en sus demostraciones en No; 2, usted hizo algunas suposiciones. Ahora intente demostrar esas suposiciones y continúe este proceso hasta demostrar todas sus suposiciones.

Al intentar responder las preguntas 1, 2 y 3 los alumnos inevitablemente argumentan de manera circular. Este es un ejemplo:



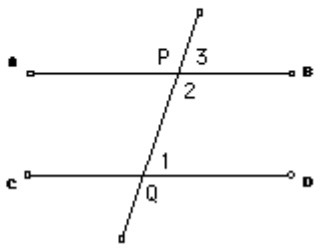
1.

$\angle Q_1 = \angle P_2$ (ángulos correspondientes, $AB \parallel CD$)

$\angle P_1 = \angle P_2$ (Angulos opuestos por el vértice)

$\therefore \angle Q_1 = \angle P_1$

Entonces ángulos alternos internos son iguales.



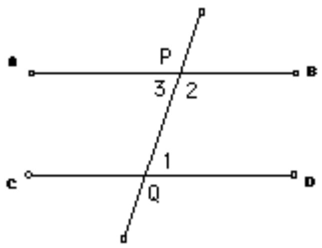
2.

$\angle Q_1 + \angle P_2 = 180°$ (ángulos adyacentes internos, $AB \parallel CD$)

$\angle P_3 + \angle P_2 = 180°$ (*QP* forma una línea recta)

$\therefore \angle Q_1 = \angle P_3$

Angulos correspondientes son iguales.



3.

$\angle P_3 + \angle P_2 = 180°$ (*APB* es una recta)

$\angle P_3 = \angle Q_1$ (ángulos alternos internos, $AB \parallel CD$)

$\therefore \angle Q_1 + \angle P_2 = 180°$

La suma de ángulos adyacentes es 180.

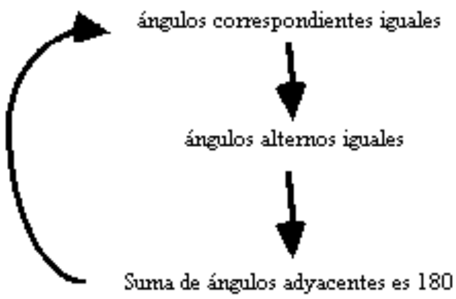


Figure 13: Un argumento circular

Estas series de demostraciones pueden representarse esquemáticamente como en la Figura 13 e ilustrar de manera clara un argumento *circular*. El problema es que no importa cuanto lo intenten, los alumnos llegan inevitablemente a alguna clase de circularidad. Aunque muchos alumnos al comienzo no identificaron el problema, con ejercicios complementarios se dieron cuenta del mismo y descubrieron que es imposible demostrar todos los enunciados matemáticos o propiedades de los objetos matemáticos sin obtener un argumento circular. Entonces comprendieron que se debía aceptar una de esas propiedades como proposición *sin demostrarla* (v.g. como definición o axioma) para evitar la circularidad.

La investigación comparativa al final del experimento USEME indicó que no sólo los grupos experimentales lograron una mayor habilidad para definir objetos geométricos conocidos y desconocidos (de manera económica y correcta), sino que habían desarrollado una comprensión profunda de la naturaleza de los axiomas, y una habilidad para reconocer argumentos circulares o no válidos (ver Human, Nel et al, 1989a).

Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría (3)

Software de Geometría Dinámica

El desarrollo del software de geometría dinámica en los últimos años constituye ciertamente el desarrollo más excitante en geometría desde Euclides. Además de reavivar interés en algunas investigaciones básicas en geometría, ha revitalizado la enseñanza de la geometría en muchos países donde la geometría euclidiana estaba en peligro de ser arrojada a la caneca de la historia. Por ejemplo, al quien aseguró en el congreso internacional de educación matemática (ICME) en España (julio de 1996) que la geometría dinámica había salvado el currículo de geometría en los Estados Unidos.

Como vimos anteriormente, una de las principales razones del mal desempeño de los alumnos en geometría puede explicarse con la teoría de Van Hiele. Por ejemplo, muchos alumnos no desarrollan habilidades de visualización que son un prerrequisito importante para el éxito en geometría. Además, se les introduce de manera prematura a la geometría formal sin permitirles una exploración experimental suficiente de las propiedades de las figuras y una introducción gradual de la terminología formal apropiada.

En el pasado, muchos profesores simplemente evitaban la exploración informal de relaciones geométricas por construcción y medición con papel y lápiz, ya que consumen demasiado tiempo (y son relativamente inexactas). (Por supuesto, también están los profesores que desde una posición filosófica extremadamente formalista, descalifican cualquier forma de trabajo experimental en matemáticas). Otro problema es que esas figuras construidas son " estáticas "; uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma. Sin embargo todo esto ha cambiado con el desarrollo de algunos paquetes sofisticados de software para geometría. Uno de los primeros de estos programas " estado de la arte " fue **Cabri-Geometry**, un programa francés que fue presentado a la comunidad internacional de educación matemática en una conferencia en Budapest en 1988. Desde entonces se han desarrollado otros programas similares, por ejemplo, **Geometer's Sketchpad** elaborado por una compañía norteamericana y con asistencia de la Fundación Nacional de las Ciencias y el Proyecto de Geometría Visual del Swarthmore College, USA.

Estos programas de geometría fueron diseñados con la intención específica de poner a disposición de los alumnos un ambiente del tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana elemental. En el pasado uno tenía que dibujar las configuraciones geométricas en una hoja de papel, obteniendo así una representación más o menos exacta pero fija, y por lo tanto limitando en extremo la exploración. En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a los que se usan en el universo familiar de " papel y lápiz ". En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

Una vez creadas, estas figuras pueden Redibujarse " agarrando " sus elementos básicos directamente en la pantalla y moviéndolos, mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente. De esta manera se puede cambiar " continuamente " un triángulo, y por ejemplo darse cuenta que sus alturas siempre se cortan en un solo punto durante la transformación. Por lo tanto el software permite repetir fácilmente experimentos en muchas posiciones diferentes y así verificar cuáles propiedades geométricas permanecen invariantes. De hecho, cabri tiene una herramienta que puede verificar si algunas propiedades (v.g. paralelismo, concurrencia, colinealidad, perpendicularidad, etc.) son verdaderas en general, y si no lo son, puede construir contraejemplos.

Probablemente la característica más apreciada de la geometría dinámica es su potencial para estimular (re-introducir) la experimentación y esa clase de " investigación " orientada a los alumnos descrita por Luthuli (1996) y otros. En un enfoque de tipo de investigación, se introduce tempranamente a los alumnos en el arte de proponer problemas y se les dan suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar como se resalta en la figura 14 (comparar con Chazan, 1990). El software de geometría dinámica estimula en gran medida esta clase de pensamiento ya que no solamente constituye un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, sino también es en extremo útil para construir contraejemplos de conjeturas falsas.

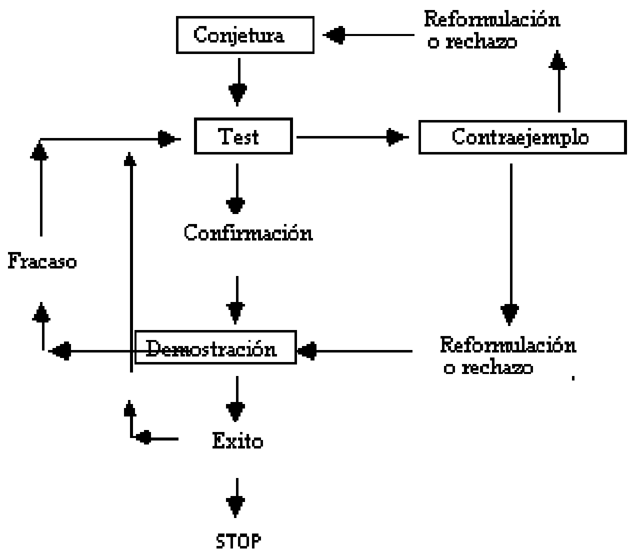


Figura 14: Investigación geométrica de los alumnos

Sin embargo, el desarrollo de la geometría dinámica también ha necesitado un cambio radical en la enseñanza de la demostración. Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes a acerca de la validez de sus observaciones empíricas, y luego tratar de motivar la necesidad de una demostración deductiva. En la experiencia, esas estrategias de tratar de generar duda para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software dinámico como ***Cabri*** o ***Sketchpad***. Cuando los alumnos son capaces de producir numerosas configuraciones correspondientes de manera fácil y rápida, entonces simplemente no tienen necesidad de una verificación o comprobación. Aunque los alumnos puedan mostrar que no necesitan convencerse en esas situaciones, el autor ha encontrado relativamente fácil provocar una mayor curiosidad preguntándoles por qué piensan que un resultado particular es verdadero; p.e. desafiándolos a tratarlo y explicarlo (ver también De Villiers, 1990; 1991; Schumann & De Villiers, 1993). Los alumnos admiten rápidamente que la verificación inductiva sólo confirma; no da un sentido satisfactorio de iluminación; es decir un insight o comprensión de cómo eso es una consecuencia de otros resultados familiares. Así que los alumnos aceptan ver la argumentación deductiva como un intento de explicación, más que de verificación.

Parece que es especialmente eficaz presentar a los alumnos tempranamente resultados en los que las explicaciones (demostraciones) posibilitan generalizaciones posteriores sorprendentes (usar la demostración como herramienta de descubrimiento).En lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como una herramienta de verificación en geometría, parece más bien que otras funciones de la demostración como la de explicación o la de descubrimiento deberían utilizarse de manera eficaz para introducir la demostración como una actividad significativa para los alumnos.

El siguiente es un ejemplo de una posible guía a este respecto tomada de De Villiers (1995a):

GUIA DE TRABAJO

a. Construya una cometa dinámica utilizando las propiedades de las cometas exploradas y discutidas en nuestras clases anteriores.

b. Asegúrese de que tiene una cometa dinámica, es decir que siempre es una cometa sin importar cómo transforme la figura. Compare su construcción con las de sus compañeros. ¿Es igual o diferente?

c. Luego construya los puntos medios de los lados y conecte los puntos medios de lados adyacentes para formar un cuadrilátero inscrito.

d. ¿Qué nota en el cuadrilátero así formado? (Realice algunas mediciones para verificar su observación).

e. Escriba su conjetura.

f. Tome cualquier vértice de su cometa y arrástrelo a una nueva posición. ¿Esto confirma su conjetura? Si no, ¿Puede modificar su conjetura?

g. Repita los pasos anteriores varias veces.

h. ¿Su conjetura también es verdadera cuando la cometa es cóncava?

i. Utilice la verificación de propiedades de cabri para verificar si su conjetura es verdadera en general.

j. Escriba su conclusión final. Compare con sus compañeros ¿Es igual o diferente?

k. ¿Puede explicar por qué es verdadera? (Tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos conocidos. Pista: construya las diagonales de su cometa. ¿Qué nota?)

1. Compare sus explicaciones con las de sus compañeros. ¿Está o no de acuerdo con sus explicaciones? ¿Por qué? ¿Cuál explicación es más satisfactoria? ¿Por qué?

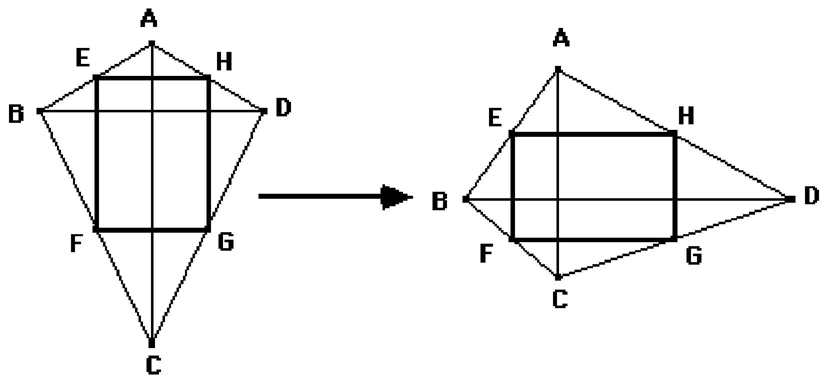


Figura 15: Explicación y descubrimiento

Formulación

Los segmentos que unen los puntos medios de lados adyacentes de una cometa forman un rectángulo.

Explicación deductiva

Un análisis deductivo muestra que el cuadrilátero inscrito siempre es un rectángulo, a causa de la perpendicularidad de las diagonales de una cometa. Por ejemplo, de acuerdo con una propiedad de los triángulos ya discutida, tenemos EF//AC en el triángulo ABC y HG//AC en el triángulo ADC (ver Figura 15a). Por lo tanto EF//HG. Igualmente, EH//BD//FG y por lo tanto EFGH es un paralelogramo. Como BD⊥ AC (propiedad de las cometas) tenemos también EF⊥EH, pero esto implica que EFGH es un rectángulo (un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo).

Mirada retrospectiva

Nótese que la propiedad de lados adyacentes iguales (o un eje de simetría por un par de ángulos opuestos) no se usó en absoluto. En otras palabras, podemos generalizar inmediatamente el resultado a un cuadrilátero perpendicular como se muestra en la figura 15b. (nótese que esto también es cierto para los casos cóncavo y cruzado). Esto muestra el valor de comprender por qué algo es cierto. Aún más, nótese que el resultado general no fue sugerido por mera verificación empírica de la conjetura original. Incluso una investigación empírica sistemática de varios tipos de cuadriláteros probablemente no hubiera ayudado a descubrir el caso general, ya que la mayoría de las personas habrían restringido su investigación a los cuadriláteros más familiares como paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados y rectángulos. (Nótese que de la explicación anterior también podemos ver inmediatamente que EFGH siempre será un paralelogramo en cualquier cuadrilátero. Verifíquelo en cabri o Sketchpad si usted quiere).

El lenguaje del profesor es particularmente crucial en esta fase introductoria a la demostración. En lugar de decir como de costumbre:

" *No podemos estar seguros de que este resultado es verdadero para todas las posibles variaciones, y por lo tanto tenemos que demostrarlo (deductivamente) para estar* *absolutamente seguros* ",

Los alumnos comprenden mucho más si el profesor dice:

> "A*hora sabemos que este resultado debe ser cierto gracias a nuestra investigación experimental extensiva. Sin embargo miremos si podemos explicar por qué es verdadero en términos de otros resultados geométricos ya conocidos. En otras palabras cómo esto es una consecuencia lógica de esos otros resultados.* "

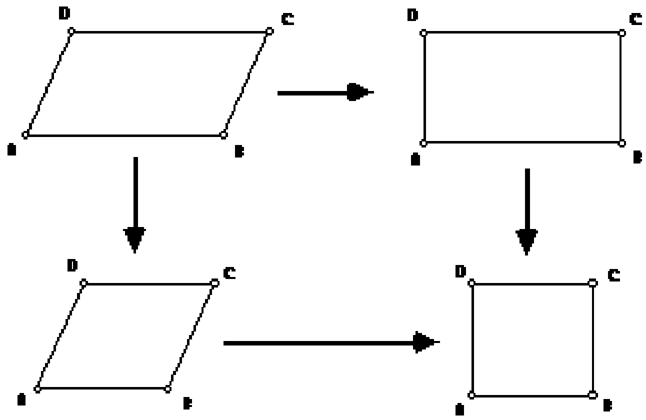
Normalmente es necesario discutir con algún detalle lo que se entiende por una " explicación ". Por ejemplo, la observación regular de que el Sol sale cada mañana no constituye una explicación; solamente reconfirma la validez de la observación. Para explicar algo, uno debe entonces explicarlo en términos de algo más, v.g. de la rotación de la tierra alrededor del eje polar. Igualmente, la observación regular que dice que la suma de los ángulos de un triángulo es180 no constituye una explicación; para explicarlo, necesitamos mostrar cómo (por qué) es una consecuencia lógica de algunos otros resultados que conocemos.

Por supuesto la demostración tiene muchas otras funciones, v. g. de verificación, sistematización, comunicación, de descubrimiento, reto intelectual, etc. que también deben comunicarse a los alumnos para que la demostración sea una actividad significativas para ellos. En efecto, parece significativo introducir las distintas funciones de la demostración más o menos en la secuencia dada en la figura 16. Es importante no retardar indebidamente la primera introducción de la demostración como medio de explicación, ya que los alumnos podrían acostumbrarse a ver la geometría sólo como una acumulación de hechos descubiertos empíricamente, en la cual la explicación no tiene ningún rol. Por ejemplo, incluso los alumnos en el nivel Van Hiele 1 podrían utilizar fácilmente la simetría para explicar por qué ciertos resultados son verdaderos (v.g. por qué los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales). Aunque las otras funciones pueden introducirse gradualmente a medida que los alumnos progresan del nivel 1 al 3, la función de sistematización debería dejarse para cuando los alumnos hayan alcanzado por lo menos el nivel de Van Hiele de 3 o 4. (En De Villiers (1995b) se dan algunos ejemplos de actividades para introducir las diferentes funciones). La función de comunicación está presente por supuesto todo el tiempo ya que el profesor necesita renegociar continuamente con sus alumnos los criterios acerca de qué constituye una explicación, una demostración, etc.

Explicación → Descubrimiento → Reto intelectual → Verificación → Sistematización

Figura 16: Funciones de la enseñanza de la demostración

La naturaleza dinámica de las figuras geométricas construidas en ***Sketchpad*** o ***Cabri*** también puede ayudar a aceptar sin problemas una clasificación jerárquica de los cuadriláteros. Por ejemplo, si los alumnos construyen un cuadrilátero con lados opuestos paralelos, luego pueden darse cuenta de que podrían arrastrarlo para que tenga la forma de un rectángulo, un rombo o un cuadrado como se muestra en la figura 17. Investigaciones posteriores sobre este aspecto particular serían de gran utilidad.



Transformación dinámica de un paralelogramo

Figura 17

La habilidad para transformar rápida y eficientemente las configuraciones geométricas con el software de geometría dinámica también permite modelar eficazmente situaciones reales y problemas por medio de dibujos dinámicos a escala. De esta manera es posible entregar a los alumnos problemas reales mucho más complicados de los que se les presentan actualmente. En De Villiers (1994b) se dan algunos ejemplos. Estos programas también tienen herramientas para trazar lugares geométricos de algunos objetos, v.g. puntos. Esta herramienta podría usarse fácilmente, no sólo en muchos contextos de problemas reales, sino también hace posible introducir y estudiar las cónicas como lugares geométricos (a la manera de los griegos) en lugar de verlas únicamente como curvas algebraicas como es el caso en el currículo actual