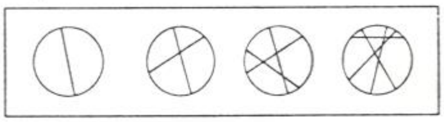
'n Bewys deur matematiese induksie van 'n bekende bewering*

Michael de Villiers, *Universiteit Stellenbosch*
*Met toestemming oorgeneem uit IWWOUSNUUS, Nr 15 (1987), Universiteit Stellenbosch

'n Bekende aktiwiteit om leerlinge se vermoë om patrone te herken in die laerskool of in die junior sekondêre standerds te ontwikkel, is:

Ondersoek die verwantskap tussen die *maksimum* aantal geslote gebiede wat nie oorvleuel nie (sê, g) waarin 'n sirkel verdeel word deur 'n sekere aantal snydende koorde (sê, n).

Deur byvoorbeeld verskeie gevalle soos die sketse hieronder te beskou



kan 'n tabel soos die volgende saamgestel word:

n	1	2	3	4	5	6	7
g	2	4	7	11	?	?	?

(Let op dat om g te *maksimeer*, 'n koord deur *al* die ander vorige koorde getrek moet word, maar *nie* deur die snypunte van enige twee ander koorde nie.) Hierdie vragie kan dus ook gebruik word om formulering/definiëring te bevorder deur aan leerlinge te vra: 'Hoe kan ons verseker dat ons die maksimum aantal gebiede verkry?'

Uit die bostaande tabel is dit maklik om soos volg te voorspel wat g sal wees vir $n = 5, 6, 7 \ldots$ ens:

n	1	2	3	4	5	6	7
g	2	4	7	11	16	22	29
	2	3	4	5	6	7	

Leerlinge sou ook aangemoedig kon word om hul 'voorspellings' eksperimenteel te gaan kontroleer. Vir leerlinge wat reeds oor die nodige algebraïese agtergrond beskik, kan die vraag gestel word om 'n algemene formule te probeer vind wat die verwantskap tussen n en g verskaf. Aangesien die tweede-orde-verskille tussen die opeenvolgende terme konstant is, is dit duidelik dat r-de term van die tipe $ar^2 + br + c$ is. Dus:

$$a + b + c = 2$$

$$4a + 2b + c = 4$$

$$9a + 3b + c = 7$$

Hieruit volg dat

$$g = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

'Hoe kan ons dan hierdie bewering bewys?' is 'n vraag wat waarskynlik spontaan sal ontstaan by senior leerlinge met 'n meer gesofistikeerde wiskundige instelling en agtergrond. Wat hieronder volg, is 'n bewys deur volledige induksie van hierdie bewering.

Bewys

Dis waar vir $n = 1$ dat $g = 2$. Gestel dis waar vir $n = k$, d w s dat $g = ½k^2 + ½k + 1$. Beskou $n = k + 1$, d w s een addisionele koord word bygetrek. Aangesien dit deur die ander k koorde getrek word, word dit deur $k + 1$ gebiede (aangrensend aan die k koorde) getrek, en verdubbel hierdie gebiede na $2(k + 1)$. Die aantal gebiede waardeur dit nie getrek is nie, is $½k^2 + ½k + 1 - (k+1)$. Die totale aantal gebiede is dus:

$$\begin{aligned} g &= 2(k + 1) + ½k^2 + ½k + 1 - (k + 1) \\ &= ½k^2 + k + ½ + ½k + ½ + 1 \\ &= ½(k^2 + 2k + 1) + ½(k + 1) + 1 \\ &= ½(k + 1)^2 + ½(k + 1) + 1 \end{aligned}$$

Dit wil sê dat as die bewering waar is vir $n = k$, is dit waar vir $n = k + 1$. Dit voltooi die bewys.

In hierdie bewys is natuurlik implisiet gebruik gemaak van die volgende twee bewerings:

1 'As 'n koord deur n koorde getrek word, word dit deur $n + 1$ gebiede aangrensend daaraan getrek.'
2 'As 'n lyn deur n gebiede getrek word, verdubbel daardie gebiede na $2n$,'

wat op hul beurt weer as aksiomas aanvaar, of andersins as lemmas (hulpstellings) bewys moet word. Hoewel beide redelik intuïtief is en waarskynlik geskik as aksiomas sou wees, kan die bewerings as volg bewys word:

Bewys 1

Dis waar vir $n = 1$ dat dit deur 2 gebiede getrek moet word. Gestel dis waar vir $n = k$ dat dit deur $k + 1$ gebiede getrek moet word. Gestel ons wil nog 'n koord deur $k + 1$ koorde trek. Sodra dit deur k koorde van die $k + 1$ koorde getrek is, moes dit reeds deur $k + 1$ gebiede getrek gewees het. Deur dit deur nog 'n koord te trek, moet dit vanselfsprekend deur nog een addisionele gebied getrek word, met die gevolg dat die totale aantal gebiede dus $(k + 1) + 1$ is.

Bewys 2

Dis waar vir $n = 1$ dat die gebiede verdubbel na 2. Gestel dit is waar vir $n = k$ gebiede dat 'n koord daardeur, die gebiede verdubbel na $2k$. Beskou $n = k + 1$ gebiede. Sodra die koord deur k van die $k + 1$ gebiede getrek is, is daar reeds $2k$ nuwe gebiede geskep. Deur dit deur die oorblywende gebiede te trek, word nog 2 nuwe gebiede bygevoeg (dit is waar vir $n = 1$), sodat die totale aantal gebiede $2k + 2 = 2(k + 1)$ word. Hieruit is dit duidelik dat die bewering in die algemeen vir $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ geld.