Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica[1]

Michael de Villiers, University of Durban-Westville

profmd@mweb.co.za

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html

Introdução

Num artigo recente para a revista *Philosophae Mathematicae*, Yehuda Rav (Em preparação) propõe uma situação hipotética interessante em que teríamos acesso a um computador muito poderoso, chamado PYTHIAGORA, com o qual seria possível verificar rapidamente se uma conjectura matemática qualquer é verdadeira ou não. Será que uma ferramenta tão poderosa como essa significaria o fim da demonstração, tal como a conhecemos hoje?

A resposta a esta questão, talvez surpreendente para o público em geral, é um "NÃO" retumbante. Como Rav explica, uma dada conjectura ser ou não verdadeira é muitas vezes uma questão irrelevante em matemática. Ele dá o exemplo da conjectura de Goldbach, ainda por demonstrar, que foi um catalisador fundamental para o desenvolvimento de grandes novas teorias enquanto os matemáticos procuravam uma demonstração:

> *"Reparem no tesouro produzido pelas tentativas de demonstração da conjectura de Goldbach, e vejam como é tão pouco significativa, comparativamente, a questão da descoberta do seu valor lógico absoluto!... Suponhamos que um dia alguém aparece com um contra-exemplo para a conjectura de Goldbach, ou com uma demonstração de que existem números pares que não se podem representar como soma de dois primos. Será que isso tornaria falsas ou tiraria algum valor a todas as teorias magníficas, conceitos e técnicas que foram desenvolvidos para demonstrar a conjectura que estamos agora a supor que é incorrecta? Nada disso. Uma demonstração da falsidade da conjectura de Goldbach apenas serviria como catalizador de* ***novos*** *desenvolvimentos, sem nenhum efeito nos* ***métodos*** *desenvolvidos até aqui na tentativa de demonstrar a conjectura. Porque começaríamos imediatamente a colocar novas questões, como por exemplo acerca da quantidade de números pares 'não-goldbachianos': serão em número finito? infinitos?... Novos tesouros viriam juntar-se aos primeiros, a par deles e não em vez deles – e é assim o percurso das demonstrações em matemática!"*

[1] Tradução de Rita Bastos para as actas do Prof Mat 2002, a partir da versão original inglesa, também publicada nas mesmas actas.

Um pouco mais adiante, Yehuda Rav enfatiza que são de facto as demonstrações, e não os teoremas, que constituem a estrutura do conhecimento matemático:

> *"Em certo sentido, os teoremas são apenas etiquetas, legendas de demonstrações, sumários de informação, títulos de notícias, esquemas editoriais. O arsenal completo de métodos matemáticos, conceitos, estratégias e técnicas de resolução de problemas, o estabelecimento de interconexões entre teorias, a sistematização dos resultados – todo o saber matemático está imbuído nas demonstrações... Pense nas demonstrações como uma rede de estradas num sistema de transportes públicos, e olhe para os enunciados dos teoremas como sendo as paragens de autocarro; o local das paragens é só uma questão de conveniência."*

Numa perspectiva análoga, o matemático investigador Gian-Carlo Rota (1997:190) observou, a propósito da recente demonstração do Último Teorema de Fermat, que o valor da demonstração vai muito mais além que o da mera verificação do resultado:

> *"O valor real do que Wiles e os seus colaboradores fizeram é muito maior do que a mera demonstração de uma conjectura excêntrica. A importância da demonstração do último teorema de Fermat reside na abertura de novas possibilidades para a matemática. ... O valor da demonstração de Wiles não está naquilo que demonstra, mas naquilo que torna acessível, no que possibilita."*

Há alguns anos, o matemático Paul Halmos observou, analogamente, em Albers (1982:239-240), que, apesar da demonstração da conjectura das quatro cores, em 1976 por Appel e Haken, com o recurso a computadores, o ter convencido de que era verdadeira, ela não lhe proporcionou uma compreensão mais aprofundada sobre as razões pelas quais é verdadeira:

> *"... agora, depois do seu trabalho, é muito menos provável que eu vá à procura de um contra-exemplo para a conjectura das quatro cores, do que antes. Nessa medida, o que aconteceu convenceu-me que o teorema das quatro cores é verdadeiro. Tenho fé que algum dia, em breve, talvez daqui a seis meses, talvez daqui a sessenta anos, alguém escreva uma demonstração do teorema das quatro cores que ocupe sessenta páginas do Pacific Journal of Mathematics. Logo depois, talvez seis meses ou sessenta anos depois, alguém vai escrever uma demonstração de quatro páginas baseada nos conceitos que entretanto desenvolvemos, estudámos e compreendemos. O resultado pertencerá à grande, gloriosa, arquitectural estrutura da matemática... a matemática não tem pressa. A eficiência não faz sentido. O que conta é a compreensão."*

Duas ideias importantes que emanam, claramente, das citações anteriores são, em primeiro lugar, que as demonstrações são uma parte indispensável do conhecimento matemático, e em segundo, que o seu valor está muito além da mera verificação de resultados. A primeira ideia refuta o mal-entendido crescente no público de que as novas ferramentas computacionais como o *Sketchpad*, o *Mathematica*, etc. estão a tornar obsoletas as demonstrações (ver, por exemplo, Horgan, 1993). Apesar de ferramentas como essas nos permitirem ganhar convicções através da visualização e de medições empíricas, as demonstrações ainda são tão importantes como sempre foram. Além disso, como está expresso na segunda ideia já referida, as demonstrações também são muito valiosas por proporcionarem novas compreensões, conduzirem a novas descobertas ou ajudarem à sistematização. Estes múltiplos papéis da demonstração são as ideias principais que vão ser exploradas mais à frente neste artigo.

O Papel e a Função da Demonstração

Tradicionalmente, a função da demonstração tem sido encarada quase exclusivamente em termos de **verificação** (convicção ou justificação) da correcção das proposições matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para eliminar as dúvidas, sejam elas pessoais e/ou de outros cépticos; esta ideia tem dominado unilateralmente a prática do ensino e a maior parte das discussões e da investigação sobre o ensino da demonstração. Por exemplo, segundo Kline (1973:151): "*uma demonstração só faz sentido quando responde às **dúvidas** dos alunos, quando prova aquilo que não é óbvio.*" (negrito acrescentado pelo autor deste artigo)

No entanto, a demonstração tem muitas outras funções importantes na matemática, que nalgumas situações são muito mais importantes para os matemáticos do que a de mera verificação. Algumas dessas funções são (confrontar com De Villiers, 1997; 1998; 1999; 2001):

- explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade)
- descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados)
- comunicação (a negociação do significado)
- desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração)
- sistematização (a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas)

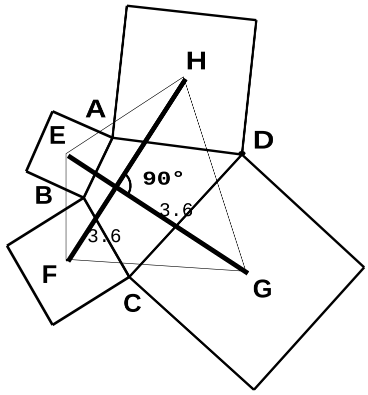

Figura 1

A Demonstração como um meio de explicar (esclarecer)

Apesar de muitos professores de matemática acreditarem que a demonstração é um pré-requisito absoluto para a convicção, na prática matemática actual é provavelmente muito mais frequente que a convicção seja um pré-requisito para a descoberta de uma demonstração. Por exemplo, há alguns anos encontrei por acaso em Gardner (1981:176-179) o teorema de Van Aubel, que estabelece que os centros dos quadrados construídos sobre os lados de qualquer quadrilátero *ABCD*, formam um quadrilátero *EFGH* que tem duas diagonais iguais e perpendiculares (ver Figura 1). Imediatamente me questionei sobre o que aconteceria se em vez dos quadrados nos lados, construíssemos rectângulos semelhantes ou losangos sobre os lados. No entanto, só há relativamente pouco tempo tive oportunidade de investigar estas questões com o recurso à geometria dinâmica.

Depois de algumas experiências iniciais com a construção de rectângulos semelhantes e losangos sobre os lados, descobri, usando o *Cabri*, as duas generalizações seguintes do teorema de Van Aubel:

1. Se se construírem *rectângulos* semelhantes sobre os lados de qualquer quadrilátero, como na Figura 2, então os centros desses rectângulos formam um quadrilátero com diagonais *perpendiculares*.
2. Se se construírem *losangos* sobre os lados de qualquer quadrilátero, como na Figura 3, então os centros desses losangos formam um quadrilátero com diagonais *iguais.*

Em qualquer dos casos, ao *clicar* e arrastar qualquer dos vértices de *ABCD* pelo ecrã do monitor foi muito fácil verificar se *EG* se mantinha perpendicular a *HF*, no primeiro, e se ficavam sempre iguais, no segundo. De facto, também usei o verificador de propriedades do *Cabri* para confirmar que ambos os resultados eram realmente verdadeiros, por exemplo: "*esta propriedade é verdadeira numa posição geral*".

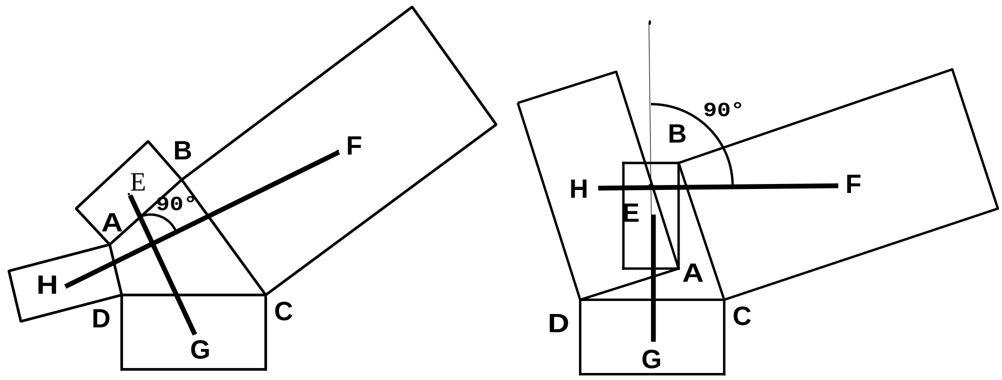

Figura 2

Já apetrechado com a convicção de que as generalizações eram realmente verdadeiras, eu prossegui então com a tarefa de construção de demonstrações dedutivas. Por que é que ainda senti a necessidade de demonstrar os resultados enunciados se já estava convencido da sua veracidade?

Em primeiro lugar, é importante realçar que é precisamente porque estava convencido da sua veracidade que eu me senti desafiado a descobrir as demonstrações dedutivas, e não porque eu duvidasse dos resultados. Porquê? Bem, ali estavam dois resultados que eram obviamente verdadeiros e eu estava intrigado para tentar descobrir *porque* é que eles eram verdadeiros. Portanto, vivi a experiência de procurar e eventualmente construir uma demonstração dedutiva como um desafio intelectual, a satisfação de uma necessidade de aprofundar a compreensão, e de maneira nenhuma como um exercício epistemológico de tentar estabelecer as suas "*verdades*" respectivas. Por outras palavras, eu não senti realmente a necessidade de aumentar a minha certeza, mas sim a de *explicar* (porque é que eram verdadeiras?) e a do *desafio intelectual* (serei capaz de as demonstrar?).

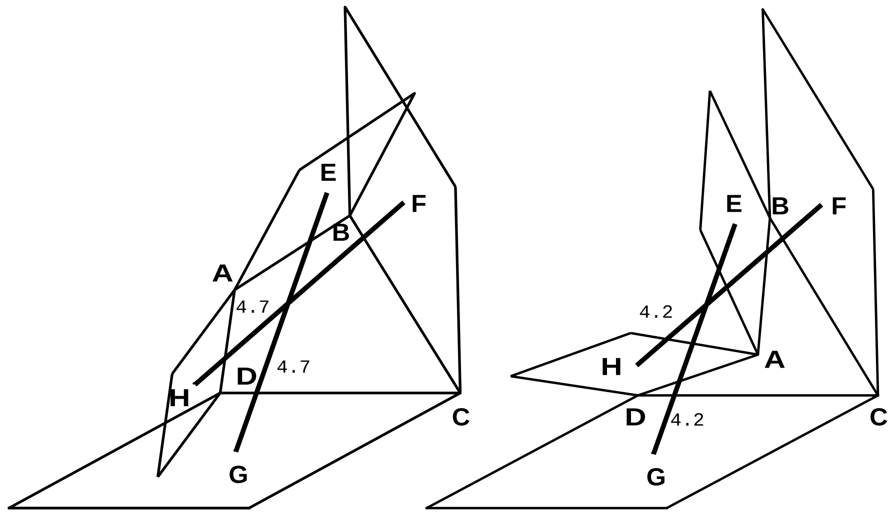

Figura 3

Analogamente, Doug Hofstadter (1997: 10) enfatiza como num contexto de geometria de geometria dinâmica a convicção pode preceder e motivar a demonstração:

> "*A propósito, repare que eu acabei de me referir às minhas observações com base no ecrã como um "facto" e um "teorema". Agora qualquer matemático mais determinado me apelidaria de assassino selvagem por me ter referido a um "facto" ou "teorema" que não demonstrei. Mas essa não é, de maneira nenhuma, a minha atitude, e nunca foi. Para mim, este resultado era uma verdade tão clara que não tinha a mínima dúvida acerca dela. Não necessitei de demonstração. Se isto soa a arrogância, deixe-me explicar. A beleza do Geometer's Sketchpad está em que ele permite que uma pessoa descubra instantaneamente se uma conjectura está certa ou errada – se estiver errada, isso é imediatamente óbvio quando se manipula uma construção no ecrã de forma dinâmica. Se estiver certa, as coisas mantêm-se sincronicamente consistentes, seja qual for a forma de mexer na figura. O grau de certeza e confiança que isso nos dá é francamente espantoso. Claro que não é uma demonstração, mas eu diria que, em certo sentido, este tipo de contacto directo com o fenómeno é mesmo mais convincente que uma demonstração porque uma pessoa vê-o realmente acontecer mesmo à sua frente. Nada disto significa que eu não queria uma demonstração. No fundo, as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático, e eu gosto tanto delas como qualquer outra pessoa. Apenas não sou um dos que acredita que a certeza* ***só*** *se adquire com a demonstração."*

Em situações como a descrita acima, a função da demonstração para o matemático não pode ser, evidentemente, a da verificação/convicção, mas tem que ser encarada em termos de outras funções para a demonstração, como a da explicação, do desafio intelectual, etc. Apesar de ser possível atingir um nível bastante alto de confiança na validade de uma conjectura através da verificação empírica à mão ou com o computador (por exemplo, construções e medições rigorosas, substituição numérica, etc.), esta geralmente não proporciona uma explicação satisfatória da razão porque uma conjectura pode ser verdadeira. Apenas confirma que é verdade, e mesmo que à medida que se consideram mais e mais exemplos, a nossa confiança possa ser cada vez maior, isso não nos traz a satisfação psicológica de nos sentirmos esclarecidos – nenhuma compreensão de como a conjectura é consequência de outros resultados familiares.

Analogamente, Davis & Hersh (1983: 369-369) apresentam uma "evidência heurística" para apoiar a Hipótese de Riemann, ainda por demonstrar, e concluem que essa evidência é "*tão forte que sustenta a convicção mesmo sem a demonstração rigorosa.*" No entanto, eles afirmam a necessidade da demonstração como "*um meio de compreender* ***porque é que*** *a conjectura de Riemann é verdadeira, o que é algo mais do que saber apenas que* ***é*** *verdadeira, através de raciocínio heurístico convincente.*"

É interessante o relato de Vimolan & De Villiers (2000) de crianças pequenas que revelaram uma necessidade de explicar (compreender melhor) um resultado, independentemente da necessidade de se convencerem, que foi plenamente satisfeita através da exploração no *Sketchpad.*

A demonstração como um meio de descoberta

Os críticos da abordagem tradicional, dedutiva, no ensino da geometria têm afirmado muitas vezes que, na sua maior parte, os teoremas começam por ser descobertos por processos intuitivos e/ou empíricos, antes de serem verificados através da produção de demonstrações. Há, no entanto, inúmeros exemplos na história da matemática em que novos resultados foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (por exemplo, as geometrias não euclidianas) tivessem podido, alguma vez, ser encontrados apenas através da intuição e/ou utilizando métodos empíricos. Mesmo em contextos tão formais como os da axiomatização e da definição, a demonstração pode frequentemente conduzir a novos resultados.

Para o matemático a demonstração é, portanto, não apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas muitas vezes também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados. Na realidade é muito frequente que a explicação (demonstração) de porque é que um resultado é verdadeiro possibilite uma generalização mais ampla, como está ilustrado no exemplo seguinte.

Honsberger (1985, 32-33) introduz o leitor aos chamados "*quadriláteros equílicos"*, designadamente um quadrilátero *ABCD* com um par de lados opostos iguais, seja *AD* = *BC*, cujas direcções formam um ângulo de 60º. (A última condições pode também ser formulada). Então um dos resultados atractivos que é demonstrado é o seguinte: "Se *ABCD* é um quadrilátero equílico e se se desenharem triângulo equiláteros sobre *AC*, *DC* e *DB*, do lado oposto a *AB*, então os três novos vértices, *P*, *Q* e *R*, são colineares" (ver Figura 4).

Como anteriormente, voltei a questionar-me sobre o que aconteceria se *ABCD* fosse um quadrilátero qualquer com lados opostos iguais e os triângulos *PAC*, *QDC* e *RDB* semelhantes entre si. *P*, *Q* e *R* seriam colineares na mesma?

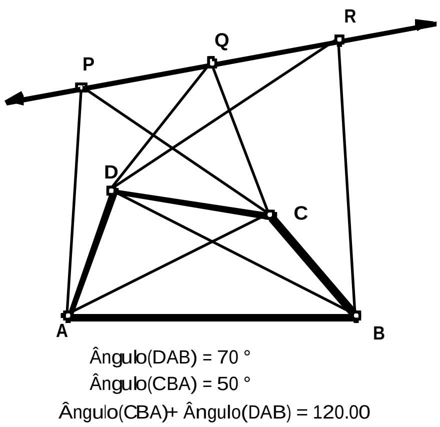

Figura 4

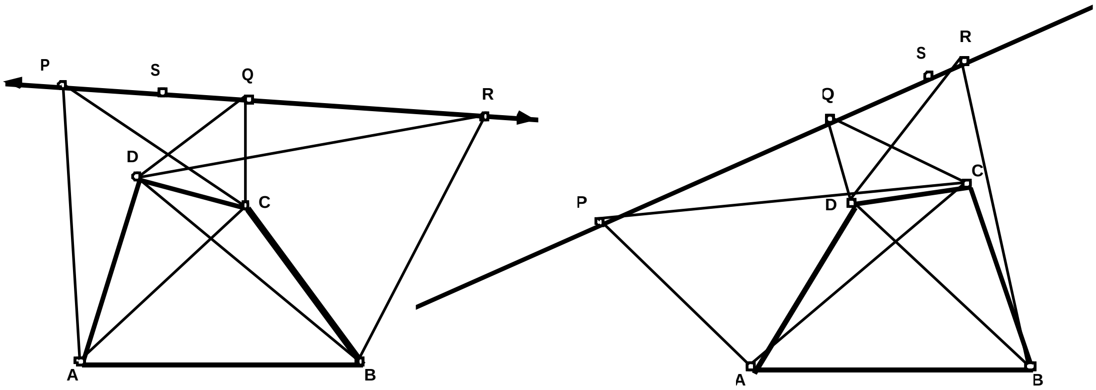

Figura 5

Ao investigar estas questões com o *Sketchpad*, consegui descobrir a seguinte generalização interessante:

"Se se desenharem triângulos semelhantes *PAC*, *QDC* e *RDB* sobre os lados *AC*, *DC* e *DB* de um quadrilátero qualquer *ABCD* com *AD* = *BC* e tal que, em que S é a intersecção dos prolongamentos de *AD* e *BC*, então *P*, *Q* e *R* são colineares" (ver Figura 5). Convém observar que a condição também pode ser formulada em alternativa como ou.

Além disso, descobriu-se que o ponto *S* também é colinear com os outros três pontos. Utilizando uma construção dinâmica no *Sketchpad*, como está ilustrado na Figura 5, e fazendo variar quer o ângulo *A*, ou o *B*, quer a forma dos triângulos semelhantes, é fácil ver que o resultado é geralmente verdadeiro.

Foi interessante que, depois de uma ou duas tentativas frustradas de demonstrar este resultado, observei enquanto manipulava a construção, que, e isso possibilitava-me, eventualmente, a construção de uma demonstração. Isto revela como a investigação com recurso a *software* dinâmico pode também auxiliar, por vezes, a construção de uma eventual demonstração.

No entanto, ao rever cuidadosamente a minha demonstração *a la Polya*, apercebi-me de repente que não tinha chegado a usar a propriedade *AD* = *BC*! Por outras palavras, o resultado podia ser generalizado imediatamente para QUALQUER quadrilátero! Isto ilustra o valor de uma demonstração explicativa, que nos permite generalizar um resultado pela identificação das propriedades fundamentais de que ela depende. Parece-me pouco provável que eu tivesse encontrado o caso geral apenas por investigação empírica.

Demonstração como meio de verificação (justificação)

É claro que, dadas as conhecidas limitações dos métodos intuitivos, indutivos ou empíricos, por si só, os argumentos já apresentados não pretendem, de modo nenhum, menosprezar a importância da demonstração como um meio de verificação indispensável, especialmente no caso de resultados surpreendentes, não intuitivos ou duvidosos.

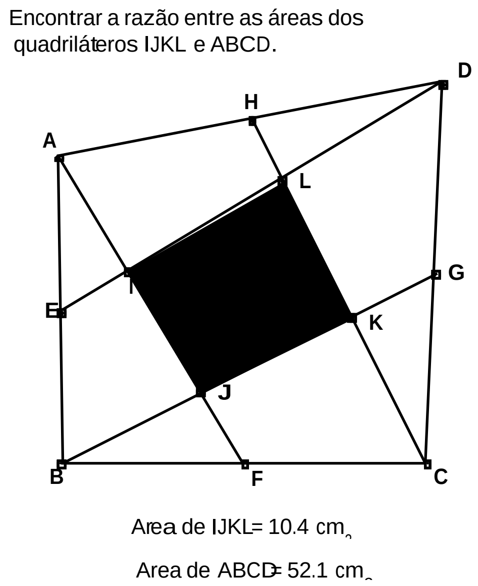

Figura 6

Portanto, embora eu não acredite que a função de verificação deva ser o ponto de partida para introduzir os principiantes, pela primeira vez, à demonstração num contexto de geometria dinâmica, acredito, sim, que ela pode (e deve) ser desenvolvida mais tarde para dar possibilidade aos alunos de atingirem uma compreensão mais desenvolvida sobre o valor e a natureza da demonstração dedutiva. Considere-se o seguinte exemplo de De Villiers (1999) cuja experiência mostrou que funciona bem com os alunos para atingir este objectivo.

Deu-se aos alunos a construção em *Sketchpad* representada na Figura 6, para determinar a razão entre as áreas, investigar mais e formular uma conjectura. Como ferramenta pedagógica intencional, a aproximação das medições foi configurada para apenas uma casa decimal. Por isso, a razão parece ser constante e igual a 0,2, qualquer que seja a forma que os alunos imprimam ao quadrilátero.

De facto, na sua maior parte, os alunos declaram rapidamente que estão 100% seguros. Por isso, frequentemente são obrigados a reconsiderar quando se lhes pede para melhorar as aproximações das medições, e então, para sua grande surpresa, verificam que os segundo e terceiro algarismos da parte decimal mudam, mas que isso não é perceptível por causa do arredondamento para uma casa decimal.

Este exemplo funciona, portanto, bem para sensibilizar os alunos para o facto de que embora o *Sketchpad* seja muito rigoroso e extremamente útil para explorar a validade das conjecturas, mesmo assim ainda é possível formular falsas conjecturas quando não se é muito cuidadoso. Geralmente, mesmo que se meça e calcule com aproximação a três casas decimais, que é o máximo da capacidade do *Sketchpad 3*, não se pode ter a certeza absoluta de que a quarta, quinta ou sexta (ou até a centésima!) casas decimais não mudam, porque elas não são mostradas quando se arredonda para três casas decimais. É por isso que uma explicação lógica ou demonstração é necessária para ter a certeza absoluta, mesmo num ambiente tão convincente como o *Sketchpad.*

Demonstração como meio de comunicação

Vários autores enfatizaram a importância da função de comunicação da demonstração, como por exemplo:

> "*... reconhecemos que o argumento matemático é dirigido a uma audiência humana que possui um conhecimento prévio que lhe dá a possibilidade de compreender as intenções do locutor ou do autor. Ao afirmar que um argumento matemático não é mecânico ou formal, também afirmamos implicitamente o que é... nomeadamente, um* ***intercâmbio humano*** *baseado em significados partilhados, nem sempre verbais ou expressos por fórmulas."* (negrito acrescentado pelo autor deste artigo) – Davis & Hersh (1986:73).
>
> "*... as definições são frequentemente propostas e defendidas por argumentação quando surgem contra-exemplos ...*" - Lakatos (1976:16)

Considere-se por exemplo a seguinte actividade de De Villiers (1999) relativamente ao bem conhecido teorema de que a soma dos ângulos de um quadrilátero é sempre 360º.

Construir um quadrilátero *ABCD* e medir os seus ângulos. Arrastar o vértice *D* sobre o lado *AB* para obter uma figura parecida com a representada na Figura 7. A soma dos seus ângulos internos ainda é igual a? A figura *ABCD* é um "*quadrilátero*"? O que significa para nós a ideia de "*quadrilátero*"? Como é que isso se relaciona com o resultado bem conhecido formulado acima? O que significa para nós ângulos "*internos"*?

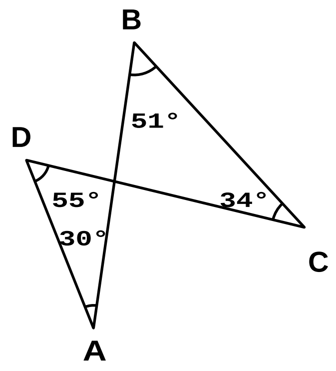

Figura 7

A primeira reacção da maior parte das pessoas a um "*contra-exemplo*" destes é a de o encarar como "*excepção*", ou "*monstro*", para sustentar o teorema de que a soma dos ângulos internos de **todos** os quadriláteros é de., isto é, a de rejeitar figuras destas como sendo quadriláteros. Podem, portanto, tentar definir quadrilátero de tal maneira que figuras como esta sejam excluídas. Lakatos (1976:16) descreve uma situação análoga depois da descoberta de um contra-exemplo, para o teorema sobre poliedros de Euler-Descartes, pelas personagens do seu livro que discutem então, veementemente se devem aceitar ou recusar o contra-exemplo.

Isto acontece porque a refutação por contra-exemplos depende muitas vezes do significado dos termos envolvidos e, por consequência, as definições são muitas vezes propostas e discutidas. Em geometria dinâmica é mais provável que os alunos construam acidentalmente um quadrilátero "cruzado", ao arrastar um vértice, e surge então, naturalmente, a questão se é, ou não, um quadrilátero, e o que significa para nós, a palavra quadilátero. Como podemos definir rigorosamente quadriláteros? O que significa para nós ângulos "*internos*"? Como fazer para "*salvar*" ou "*reformular*" o teorema original?

Demonstração como meio de desafio intelectual

Para os matemáticos a demonstração é um desafio intelectual que eles acham apelativo como outras pessoas podem achar apelativos puzzles ou outros passatempos ou esforços. A maior parte das pessoas tem experiência suficiente, mesmo que apenas a tentar resolver um jogo de palavras cruzadas ou um quebra-cabeças, para poder compreender a exuberância com que se diz que Pitágoras e Arquimedes teriam celebrado a descoberta das suas demonstrações. Fazer demonstrações poderia ser também comparado com o desafio físico de correr uma maratona ou completar uma prova de triatlo, e a satisfação que se sente depois. Neste sentido, a demonstração serve as funções de *realização* e *satisfação pessoais.*

A demonstração é portanto um terreno para testar a força e a ingenuidade intelectuais do matemático (ver Davis & Hersh, 1983:369). Parafraseando um famoso comentário de Mallory a propósito das razões que o levaram a subir ao Monte Evereste: "*Nós demonstramos os nossos resultados por que eles estão lá*". Levando esta analogia ainda mais longe: muitas vezes não é da existência da montanha que duvidamos (a verdade do resultado), mas da nossa capacidade de (e de como) a conquistar (demonstrar)!

Demonstração como meio de sistematização

A demonstração põe a descoberto as relações lógicas subjacentes entre proposições de tal forma que nem uma quantidade de testes empíricos nem a intuição pura poderiam pôr. A demonstração é, portanto, uma ferramenta indispensável para sistematizar vários resultados conhecidos num sistema dedutivo. Mais do que fornecer aos alunos as definições prontas a usar, na minha opinião eles deveriam empenhar-se em definir, eles próprios, alguns conceitos matemáticos. Já em 1908 Benchara Blandford escreveu (citado em Griffiths & Howson, 1974: 216-217):

> "*A mim parece-me um método radicalmente corrupto, em geometria com certeza, se não noutras matérias, apresentar às crianças definições prontas a usar para serem memorizadas de seguida, depois de serem explicadas com maior ou menor cuidado. Fazer isto é certamente deitar fora deliberadamente um dos mais valiosos factores de disciplina intelectual. A actividade da própria criança, de desenvolver uma definição operacional, estimulada por questões apropriadas, é simultaneamente interessante e altamente educativa*".

Suponhamos, por exemplo, que queremos definir formalmente o conceito de losango. Podemos então começar por avaliar as possibilidades seguintes por construção e medição no *Sketchpad* (ver Govender & De Villiers, 2002):

(a) Um losango é um quadrilátero com diagonais perpendiculares.

(b) Um losango é um quadrilátero com diagonais perpendicular que se bissectam.

(c) Um losango é um quadrilátero com dois pares de lados adjacentes iguais.

Uma investigação como esta revela facilmente que, das proposições acima, a primeira e a última são incompletas, mas que o losango construído no segundo caso mantém-se sempre um losango qualquer que seja a maneira como arrastamos os vértices. Isto implica que as condições da alínea (b) são suficientes e que se deve aceitar esta proposição como uma definição formal, e dela derivar logicamente (demonstrar) todas as outras propriedades do losango como teoremas (por exemplo, todos os lados são iguais, etc).

Comentários finais

Em vez de tentar pôr o foco, unilateralmente, na demonstração como meio de verificação em geometria dinâmica (que não faz sentido para alunos principiantes), deve-se utilizar inicialmente a função mais fundamental de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma actividade significativa para os alunos. Isto requer que os alunos sejam iniciados bem cedo à arte de formular problemas e que lhes tenham sido proporcionadas oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc. Os programas de geometria dinâmica encorajam fortemente este tipo de pensamento na medida em que não só são meios poderosos de verificação de conjecturas verdadeiras, como também são extremamente úteis na construção de contra-exemplos para falsas conjecturas.

Referências

Albers, D.J. (1982). Paul Halmos: Maverick Mathologist. *The Two-year College Mathematics Journal*, 13(4), 234-241.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). *The Mathematical Experience*. Great Britain: Pelican Books.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1986). *Descartes' Dream*. New York: HBJ Publishers.

De Villiers, M. (1997). The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some personal reflections. In Schattschneider, D. & King, J. (1997). *Geometry Turned On!* Washington: MAA.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. Chapter in Lehrer, R. & Chazan, D. (1998). *New directions in teaching and learning geometry*. Lawrence Erlbaum.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad*. USA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2001). Papel e funcoes da demonstracao no trabalho com o Sketchpad. (2001). *Educacao 'e Matematica*, June, No. 63, pp. 31-36. (A PDF copy, requiring Adobe Acrobat Reader, of this paper can be directly downloaded from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofc.pdf).

Gardner, M. (1981). *Mathematical Circus*. Gt. Britain: Chaucer Press.

Govender, R. & De Villiers, M. (2002). Constructive evaluation in a *Sketchpad* context. *Proceedings of AMESA 2002 Congress*, July.

Honsberger, R. (1985). *Mathematical Gems III*, Math Assoc. of America.

Horgan, J. (1993). The Death of Proof. *Scientific American*, 269 (4), 92-103.

Griffiths, H.B. & Howson, A.G. (1974). *Mathematics: Society and Curricula*. Cambridge University Press.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math*. New York: St. Martin's Press.

Mudaly, V. & De Villiers, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. (2000). *Pythagoras*, 52, Aug, 20-23.

Rav, Y. (In press). Why do we prove theorems? *Philosophae Mathematicae*.

Rota, G-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Beauty. *Synthese*, 111, 171-182.