

INVESTIGACION

EL PAPEL Y LA FUNCION DE LA DEMOSTRACION EN MATEMATICAS¹

Michael de Villiers

Research Unit on Mathematics Education,
Universidad de Stellenbosch, Stellenbosch 7600, Africa del Sur
Traducido por JOSÉ MARÍA ALVAREZ FALCÓN

RESUMEN. Tradicionalmente, la función de la demostración se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación de enunciados matemáticos. Este artículo critica duramente esta posición por ser completamente parcial y, en su lugar, propone un modelo que distingue entre cinco funciones de la demostración en matemáticas. El análisis se efectúa en base a consideraciones epistemológicas y a testimonios personales de matemáticos en activo. Siendo la verificación sólo una de las cinco funciones, se la muestra en situaciones donde es, con mucho, de menor importancia que alguna de las restantes. Finalmente, se argumenta que la presentación significativa de la demostración en la educación matemática puede ser muy dependiente de la negociación apropiada de estas funciones con los alumnos.

ABSTRACT. Traditionally the function of proof has been seen almost exclusively in terms of the verification of the correctness of mathematical statements. This paper strongly criticizes this view as one-sided, and instead proposes a model which distinguishes between five different functions of proof in mathematics. This analysis is based on epistemological considerations, as well as the personal testimonies of practising mathematicians. Verification being only one of the five functions, is then shown in some situations to be of far less importance than some of the other functions. Finally, it is argued that the meaningful presentation of proof at school may be highly dependent on the appropriate negotiation of these functions to pupils.

1. Este artículo es una versión adaptada de la documentación presentada en el *National Subject Didactics Symposium*, 26-28 de septiembre de 1990, Universidad de Stellenbosch y en la *Amtek Conference*, 28-29 de septiembre de 1990, Durban: bajo el título: *Proof in the mathematics curriculum*.

N.R. Artículo aparecido en *Pythagoras*, 24 Nov. 1990. Traducido y publicado con la correspondiente autorización.

Michael de Villiers

1. INTRODUCCION

Los problemas que tienen los alumnos para percibir la necesidad de una demostración son bien conocidos por todos los profesores de secundaria y se identifican, sin excepción, en toda la investigación educativa como problema prioritario en su enseñanza. ¿Quién no ha experimentado la frustración que conlleva esta pregunta de un alumno: «¿Por qué tenemos que demostrarlo?». La siguiente conclusión de Gonobolin (1954:61) ejemplifica el problema:

«... los alumnos... no... reconocen la necesidad de una demostración lógica de los problemas geométricos, especialmente cuando estas demostraciones son visualmente obvias o pueden efectuarse empíricamente».

De acuerdo con Afanasjewa en Freudenthal (1958:29), los problemas que los alumnos tienen con las demostraciones no pueden ser solamente atribuidos a un lento desarrollo cognitivo (por ej.: incapacidad de razonamiento lógico), sino a la incapacidad de ver la función (significado, propósito y utilidad) (*sic*) de la demostración. De hecho, varios estudios recientes –en oposición a Piaget– han demostrado que niños muy pequeños son ampliamente capaces de efectuar un razonamiento lógico en situaciones que sean reales y *significativas* para ellos (Wason & Johnson-Laird, 1972; Wallington, 1974; Hewson, 1977; Donaldson, 1979). Más aún, los intentos, por parte de los investigadores, para la enseñanza de la Lógica no muestran significantes diferencias estadísticas entre los resultados académicos de los alumnos y sus apreciaciones de la demostración (Deer, 1969; Walter, 1972; Mueller, 1975). Más que cualquier otra cosa, parece ser que la carta o jugar es la negociación con los alumnos, de las variadas funciones que la demostración tiene.

La cuestión, de todas formas, es «¿cuáles son realmente las funciones de la demostración (dentro de las propias matemáticas) que pueden ser utilizadas en el aula para hacer de ella una actividad más significativa?». El propósito de este artículo es proporcionar un meta-análisis de algunas importantes funciones de la demostración y discutir brevemente algunas implicaciones en su enseñanza.

2. LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACION EN MATEMATICAS

Tradicionalmente, la función de la demostración ha sido considerada casi exclusivamente en términos de *verificación* (convicción o justificación) de lo correcto de una proposición matemática. La idea es que la demostración se utiliza principalmente para eliminar las dudas personales y/o la de los escépticos; una idea que ha monopolizado la práctica de la enseñanza y la mayor parte de las discusiones e investigaciones sobre su docencia. Por ejemplo, de acuerdo con Wilder (1944:318), una demostración es:

«sólo un proceso de prueba que aplicamos a esas sugerencias de nuestras intuiciones». (negrita añadida).

El papel y la función de la demostración en matemáticas

«una demostración es sólo significativa cuando responde a las **dudas** de los alumnos, cuando prueba lo que no es obvio». (negrita añadida). Kline (1973:151).

«...la necesidad, la funcionalidad de la demostración solo sale a la superficie en situaciones en las que los alumnos encuentran **incertidumbre** sobre la verdad de proposiciones matemáticas». (negrita añadida). Alibert (1988:31).

«una demostración es un razonamiento necesario para **dar validez** a una afirmación, una argumentación que puede asumir formas diferentes, mientras sea convincente». (negrita añadida). Hanna (1989:20).

Recientemente, en un artículo en *Pythagoras*, Volmink (1990:8:10) distinguía la convicción (verificación) como la función más importante de la demostración definiéndola así:

«¿Por qué nos empeñamos en demostrar teoremas? Afirmando que la respuesta es: para **convencer a la gente** (incluido nosotros mismos)... podemos considerar la demostración como un argumento suficiente para convencer a alguien razonablemente escéptico».

Aunque muchos autores (Van Dormolen, 1977; Van Hiele, 1973; y Freudenthal, 1973, y otros) han argüido que la propia necesidad de rigor deductivo puede sufrir cambios y hacerse más complicada en el futuro, esta posición es también planteada desde el punto de vista de que la función de la demostración es principalmente la de verificación, por ejemplo:

«para prosperar en el rigor, el primer paso es **dudar** del rigor en el que uno cree en el presente, sin esta **duda** no se permitiría a nadie más la prescripción de nuevos y personales criterios de rigor». (negrita añadida). Freudenthal (1973:151).

Muchos autores han propuesto también estadios específicos en el desarrollo del rigor, por ejemplo, Tall (1989:30), propone tres estadios para la elaboración de un razonamiento convincente: el convencimiento propio, el convencimiento de un amigo y el convencimiento de un enemigo. Aunque estas distinciones son extremadamente útiles, caen claramente dentro de las categorías anteriormente expuestas.

Es más que una sospecha el que la mayoría de los profesores de matemáticas en Secundaria mantienen casi exclusivamente esta visión *formalista* de verificación/convicción sobre la función de la demostración en matemáticas. De hecho, en una encuesta realizada durante 1984 en 11 Universidades de Sudáfrica, repartidas por todo el país, se encontró que más de la mitad de los alumnos H.E.D. (postgraduados) en educación matemática estaban de acuerdo en que la *única* función de una demostración era «asegurarse», esto es, la verificación de la veracidad de los resultados (De Villiers, 1987:38).

De todas formas, como señala Bell (1976:24) esta visión de la verificación/convicción como principal función de la demostración, «obvia la considera-

Michael de Villiers

ción de la naturaleza real de la demostración», pues la convicción en matemáticas se obtiene a menudo «por medios diferentes de los que resultan de una demostración lógica». Por ejemplo, los matemáticos dedicados a la investigación escudriñan minuciosamente las demostraciones publicadas, pero están bastante influenciados por la *autoridad* del autor, la comprobación en casos específicos y una evaluación informal, mientras «los métodos y el resultado encajen, parezcan razonables...» (Davids & Hersch, 1986:67). Por tanto, es el contexto de la actual práctica investigadora quien reclama un análisis más completo del papel y las funciones de la demostración. Sin pretender completitud ni unicidad, el autor y sus colaboradores han encontrado útil en sus investigaciones de años anteriores el siguiente modelo para las funciones de la demostración. Como se hará notar, es un pequeño desarrollo del modelo de Bell (1976), que originalmente distingue entre las funciones de verificación, iluminación y sistematización. El modelo se presenta ahora (sin orden específico de importancia) y se discute posteriormente:

- Verificación (concerniente a la *verdad* de una afirmación).
- Explicación (profundizando en *por qué* es verdad).
- Sistematización (la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas).
- Descubrimiento (el descubrimiento o invención de *nuevos* resultados).
- Comunicación (la *transmisión* del conocimiento matemático).

2.1. La Demostración como medio de verificación/convicción

Con muy pocas excepciones, los profesores de matemáticas parecen creer que una demostración proporciona *certeza absoluta* y que es, por tanto, la *autoridad absoluta* para establecer la validez de una conjetura. Parecen mantener la *visión naïf* descrita en Davis & Hersch (1986:65) que consiste en creer que detrás de cada teorema existe una secuencia de transformaciones lógicas que van desde la hipótesis a las conclusiones, absolutamente comprensibles e irrefutablemente garantes de la verdad. De todas formas, esta visión es completamente falsa. La demostración no es necesariamente un prerrequisito para la convicción; al contrario, la convicción es probablemente un prerrequisito bastante más frecuente para la búsqueda de la demostración. (¿Por qué abstrusas y obscuras razones íbamos a perder meses, años incluso, para demostrar ciertas conjeturas, sino estamos ya convencidos de antemano de su veracidad?).

El bien conocido George Polya (1954:83-84) escribe acerca de esto:

«... una vez verificado el teorema en varios casos particulares, conseguimos reunir suficiente evidencia inductiva. Esta fase inductiva sobrepasó nuestra **sospecha** inicial y nos dio una fuerte **confianza** en el teorema. Sin tal **confianza**, difícilmente podríamos encontrar el valor necesario para llevar a cabo la demostración, que no es, ni con mucho, un trabajo rutinario. Cuando uno se convence de que el teorema es **verdadero**, se puede empezar a **demostrarlo**». (negrita añadida).

El papel y la función de la demostración en matemáticas

En situaciones como la anterior, donde la convicción proporciona la motivación para encontrar una demostración, la función de ésta no puede ser, es claro, la de verificación/convicción, sino que debe buscarse en otros términos (véase más adelante).

La certeza absoluta tampoco existe en la investigación matemática, y la convicción personal depende habitualmente de una combinación de intuición, verificación cuasi-empírica y la existencia de una demostración lógica (no necesariamente rigurosa). De hecho, se puede llegar a veces a un alto nivel de convicción incluso sin la existencia de una demostración. Por ejemplo, en su discusión de la «evidencia heurística» que apoya los aún no demostrados teoremas de pares de números primos gemelos y la famosa Hipótesis de Riemann², Davis & Hersch (1983:369) concluyen que la evidencia es «tan fuerte que conduce a la convicción incluso sin demostración rigurosa».

El hecho de que la convicción en matemáticas no se consigue sólo con una demostración también surge sorprendentemente de la observación de un antiguo editor de *Mathematical Reviews*: aproximadamente la mitad de las demostraciones allí publicadas estaban incompletas o contenían errores, aunque los teoremas que pretendían demostrar eran esencialmente verdaderos (Hanna, 1983:71). Parece, por tanto, que la *razonabilidad* de los resultados disfruta a menudo de prioridad frente a la existencia de una demostración completamente rigurosa. Más aún, es comúnmente aceptado entre los matemáticos actuales el hecho de que no hay tal cosa que pueda llamarse una demostración rigurosamente completa (Hanna, 1983&1989b; Kline, 1982). En primer lugar, está el problema de que no existen estándares absolutos para la evaluación de la corrección lógica de una demostración ni para su aceptación por la comunidad matemática en su totalidad. En segundo lugar, como señalan Davis & Hersch (1986:66), los matemáticos sólo publican aquellas partes de su razonamiento que consideran importantes para conseguir convencer, dejando a un lado todos los cálculos rutinarios y manipulaciones algebraicas que puedan ser efectuados por el lector. Por lo tanto, «una demostración completa» de acuerdo con ellos, «sólo significa demostrar con el detalle suficiente como para convencer a una determinada audiencia» (Davis & Hersch, 1986:73).

Además, los intentos de construir demostraciones rigurosamente completas dan lugar a desarrollos tan largos y complicados que una revisión evaluadora se hace imposible y la probabilidad de errores crece al mismo tiempo muy rápidamente. Por ejemplo Manin (1981:105) estima que las demostraciones «rigurosas» de las conjeturas de Burnside consistirían cada una en quinientas páginas aproximadamente, y una demostración «completa» de la conjetura de Ramanujan requeriría alrededor de dos mil páginas. Incluso el bien conocido, aunque relativamente simple teorema de Pitágoras llenaría al menos ochenta páginas, de acuerdo con Renz (1981:85).

Los limitativos teoremas de Gödel, Tarski y otros, de comienzos de siglo, han puesto de manifiesto lo inadecuado de una demostración deductiva. Lakatos (1976, 1978) ha argumentado, a partir del análisis epistemológico de algunos ejemplos de la historia de las matemáticas, que la demostración es por

2. Aunque Hideya Matsumoto propuso en 1984 una demostración de la Hipótesis de Riemann, no ha sido aún estudiada ni aceptada por la comunidad matemática en su conjunto. (Devlin, 1985).

Michael de Villiers

naturaleza «falible», y que no proporciona garantía alguna de consecución de certeza. Por ejemplo:

«Ha habido esfuerzos considerables, con éxito parcial, para simplificar los Principia de Russell y parecidos sistemas lógicos. Pero, aún cuando los resultados han sido matemáticamente interesantes e importantes, no han podido volver a disfrutar de su perdida posición filosófica. Los Grandes Logiques no han podido demostrar la veracidad ni siquiera la consistencia; sólo pueden demostrar la falsedad –o incluso la inconsistencia–». Lakatos (1978:31).

Cuando investigan la validez de una conjetura desconocida, los matemáticos no buscan (o no deberían) sólo la demostración, sino que intentan construir contraejemplos al mismo tiempo, mediante pruebas cuasiempíricas, ya que estas pruebas pueden sacar a la luz contradicciones ocultas, errores, o supuestos no explícitos. (Por ej., véase la carta al Director –Pythagoras 24, Nov. 1990– «Un contraejemplo del teorema de Kendal»). Así, los contraejemplos proporcionan la necesidad de reconsiderar antiguas demostraciones y de construir otras nuevas. En realidad la mayoría de los matemáticos actuales están un poco demasiado reticentes en lo que respecta a la demostración deductiva, no sólo por la ingente cantidad de ejemplos de demostraciones falsas e incompletas a lo largo de la historia, sino también por su experiencia personal³.

Consecuentemente, la certeza personal también depende de la continua ausencia de contraejemplos de cara a la evaluación cuasi-empírica. En la consecución del convencimiento, el proceso cuasi-empírico de falsación fallida juega, por tanto, un papel tan importante como el de la justificación (deductiva).

Desde luego, a la vista de las bien conocidas limitaciones de la intuición y de los métodos cuasi-empíricos, las consideraciones anteriores no pueden, de ninguna manera, quitar importancia a la demostración como método extremadamente útil de verificación, especialmente en el caso de resultados sorprendentemente no intuitivos o dudosos. Más bien se ha intentado situar la demostración en una perspectiva más adecuada, en vez de la presente idolatría distorsionada hacia la demostración como el único (y absoluto) medio de verificación/convicción.

2.2. La demostración como medio de explicación

Aunque es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasi-empírica (por ej., construcción y medida muy precisas de un modelo; sustitución numérica, etc.), esto no proporciona generalmente una explicación satisfactoria de por qué puede ser

3. El autor ha tenido dos experiencias recientes donde la comprobación cuasi-empírica de teoremas que previamente había demostrado, necesitaba, en su caso, una clarificación de ciertos términos indefinidos (De Villiers, 1989a) y en el otro, una reformulación radical de la propia conjetura (De Villiers, en prensa a).

El papel y la función de la demostración en matemáticas

*cierta*⁴. Simplemente confirma que es verdad, incluso cuando la consideración de más y más ejemplos puede aumentar la confianza, no da el sentido, psicológicamente satisfactorio, de iluminación, esto es: una visión desde dentro o meterse dentro en el cómo surge como consecuencia de otros resultados ya familiares. Por ejemplo, a pesar de la convincente evidencia heurística de la ya mencionada Hipótesis de Riemann, se puede tener aún una ardiente necesidad de explicación, como declaran Davis & Hersch (1983:368):

«Es interesante preguntar, en un contexto como éste, por qué sentimos aún la necesidad de una demostración... Parece claro que la necesitamos porque... si algo es cierto y no podemos deducirlo de esta forma, es un signo de falta de entendimiento por nuestra parte. En otras palabras, creemos que una demostración debería ser una manera de entender por qué la conjetura de Riemann es cierta, lo que es algo más que saber simplemente, por razonamientos heurísticos, que es cierta».

Recientemente, Gale (1990:4) también destacó claramente, en referencia a los descubrimientos experimentales de Feigenbaum en geometría de fractales, que la función de las eventuales demostraciones era la de explicación, en absoluta la de verificación:

«Landford y otros matemáticos no intentaban dar validez a los resultados de Feigenbaum; no más que, digamos, Newton intentaba dar validez a los descubrimientos de Kepler sobre las órbitas planetarias. En ningún caso ha estado en cuestión la validez de estos resultados. Lo que faltaba era la explicación. ¿por qué eran elípticas las órbitas? ¿Por qué satisfacían esas particulares relaciones?... hay un mundo de diferencia entre validar y explicar». (negrita añadida).

Así, en la mayoría de los casos en los que los resultados son intuitivamente evidentes por sí mismos, y/o están apoyados por evidencia cuasi-empírica convincente, la función de la demostración no es, ciertamente, la de verificación, sino más bien la de explicación⁵. No es cuestión de «asegurarse», sino de «explicar por qué». Desde luego, no todas las demostraciones son igualmente explicativas, así que es posible distinguir entre demostraciones que «verifican» y demostraciones que «clarifican». Steiner (1978:143), citado por Hann (1989a:48), caracteriza una demostración explicativa como sigue:

4. Debería mencionarse, en todo caso, que a veces un razonamiento heurístico (por ej., el uso de razonamiento analógico para la extrapolación a más dimensiones de relaciones en dos dimensiones), puede realmente proporcionar suficiente explicación por sí mismo. El propósito de una demostración deductiva cuando las necesidades de verificación y explicación se han satisfecho a priori, sería entonces, y más que el de sistematización, esto es, la inclusión del resultado en un sistema deductivo, más que arrojar luz sobre él (ver párrafo 2.3), el proporcionar una visión profunda de por qué es cierto (o verificar que es cierto).
5. En De Villiers (1989b) se da un ejemplo fácilmente accesible de geometría en secundaria, donde el autor se autoconconvenció por métodos cuasi-empíricos antes de buscar una explicación deductiva.
6. Hay algunos ejemplos en Hann (1989a) y De Villiers (1990). También pueden hacerse distinciones adicionales entre las demostraciones que «sistematizan» y demostraciones que «descubren» (De Villiers, 1990). Por ejemplo, la demostración tradicional de la concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo utilizando congruencias en vez de utilizar, más simplemente,

Michael de Villiers

«una demostración explicativa hace referencia a una propiedad característica de una entidad o estructura mencionada en el teorema, de manera que, a partir de la demostración, se hace evidente que el resultado depende de la propiedad. Debe ser evidente, eso es, que si sustituimos en la demostración un objeto diferente del mismo dominio, el teorema se colapsa; todavía más, deberíamos ser capaces de ver cómo varía la respuesta del teorema cuando variamos el objeto».

Más aún, para la mayoría de los matemáticos es probablemente más importante el aspecto aclaratorio/explicativo de una demostración que el aspecto de verificación. Por ejemplo, el bien conocido Paul Halmos afirmó hace algún tiempo que, aunque la demostración asistida por ordenador del teorema de los cuatro colores de Appel & Haken lo convenció de su veracidad, preferiría personalmente una demostración que también proporcionara un «entendimiento» (Albers 1982:239-240). También para Manin (1981:107) y Bell (1976:24), la explicación es un criterio para una «buena» demostración, afirmando, respectivamente, que es «la que nos hace más sabios» y que «se espera proporcione una visión interior de **por qué** la proposición es cierta».

2.3. La demostración como medio de sistematización.

En contraste con la demostración que muestra las relaciones lógicas que subyacen entre diversas afirmaciones, no habrá suficiente comprobación cuasi-empírica ni intuición bastante para conseguir este aspecto. Por tanto, la demostración es una herramienta indispensable para sistematizar varios resultados conocidos en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Así, la demostración está intrínsecamente involucrada en el proceso matemático de *axiomatización y definición a posteriori* (Krygowska, 1971:129-130; Human, 1978:164-165) que forma la columna vertebral de la *sistematización*, tanto *local* como *global* (Freudenthal, 1973:451-461). Algunas de las más importantes funciones de una sistematización deductiva de resultados conocidos se dan a continuación (De Villiers, 1986):

- Ayuda a *identificar* inconsistencias, razonamientos circulares y suposiciones ocultas o no explícitas.
- Verifica y simplifica las teorías matemáticas, integrando conceptos, afirmaciones y teoremas entre sí, consiguiendo una presentación económica de los resultados.
- Proporciona una útil *perspectiva global* o a *vista de pájaro* de cada tema, exponiendo su estructura axiomática subyacente, a partir de la cual pueden deducirse las demás propiedades.

simetrías se debe exclusivamente a propósitos *sistematizadores* (para mostrar que es consecuencia de las congruencias, tomadas generalmente como axiomas en nuestro programa). Más aún, mientras una demostración puede llevar fácilmente a una posterior generalización del resultado (ver ejemplo en párrafo 2.4), otra demostración (por ej., mediante geometría analítica) no necesariamente proporcionará una visión profunda que conduzca a nuevos descubrimientos por generalización inmediata (De Villiers, 1989d).

El papel y la función de la demostración en matemáticas

- Ayuda a las *aplicaciones*, tanto dentro como fuera de las matemáticas, pues ayuda a comprobar la aplicabilidad de la compleja estructura global de la teoría, mediante la simple evaluación de la conveniencia de sus axiomas y definiciones.
- A menudo da lugar a sistemas deductivos *alternativos* que proporcionan nuevas perspectivas; y/o resultan ser más económicos elegantes y potentes que los ya existentes.

Aunque algunos elementos de verificación también están obviamente presentes aquí, el primer objetivo no es, desde luego, «*comprobar si ciertas afirmaciones son realmente verdaderas*», sino organizar lógicamente enunciados individuales no relacionados, que *de antemano se sabe que son ciertos*, dentro de un «*todo coherente y unificado*». Debido a la perspectiva global que proporciona tal simplificación y unificación, hay, por supuesto, un claro elemento de iluminación cuando la demostración se utiliza como medio de sistematización. En este caso, de todas formas, el enfoque va dirigido a la iluminación global, más que a la local. Así, es una perspectiva completamente falsa decir en el aula –al demostrar enunciados evidentes por sí mismos, como los existentes en la introducción a la geometría euclídea– que uno «*se está asegurando*». En tales casos, los matemáticos están en realidad mucho menos preocupados por su veracidad que por su sistematización dentro de un sistema deductivo. Por ejemplo, la función primordial de la demostración del teorema de los valores intermedios para funciones continuas es meramente la de sistematización, pues un simple dibujo, combinado con un razonamiento informal es suficiente tanto para su verificación como para su aclaración.

Es aún más importante dejar claro que las necesidades de sistematización para un matemático pueden ser satisfechas de manera completamente distinta a su necesidad explicativa o verificativa. Por ejemplo, utilizando de nuevo un ejemplo personal, el autor (De Villiers, en prensa(a)), sintió una necesidad adicional de construcción de demostraciones, estrictamente mediante Análisis, para dos afirmaciones relacionadas con simetrías respecto a punto y recta de funciones derivables con el propósito de sistematizar los resultados, aunque ya se había autoconvencido suficientemente por comprobación cuasi-empírica e incluso había construido una explicación geométrica satisfactoria.

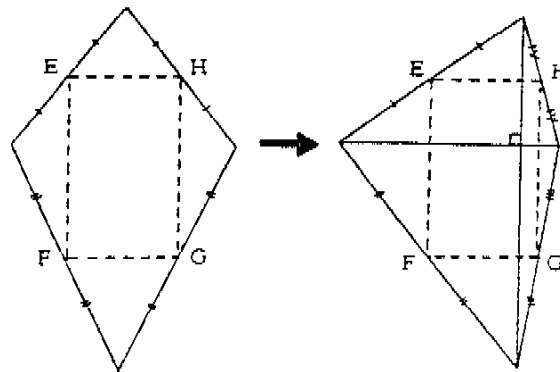
2.4. La demostración como medio de descubrimiento

Quiénes critican el exceso de rigor deductivo en niveles docentes sostienen a menudo que la deducción en general (y la demostración en particular) no es una herramienta especialmente útil para el *descubrimiento* real de nuevos resultados matemáticos. Creen ingenuamente que los teoremas son descubiertos de pronto por intuición y/o métodos cuasi-empíricos, antes de ser verificados con una demostración. Por ejemplo, Hanna (1983:66) sostiene: «... *las proposiciones y los conceptos matemáticos se ... concluyen y formulan antes de que las demostraciones se establezcan*». (negrita añadida). También son citados, a este efecto, matemáticos como Ramanujan (1887-1920) o Joseph Fourier (1768-1830), quien no demostró ni un sólo teorema de la ma-

Michael de Villiers

tería que él mismo inventó: el *Análisis de Fourier*. Quizá esta percepción sea también debida, en parte, a la manera estereotipada en la que se piensa de la demostración (se presenta primero la conclusión *seguida* de la prueba). De todas formas, este punto de vista es completamente falso, pues existen numerosos ejemplos de la historia de las matemáticas en los que los nuevos resultados fueron descubiertos/inventados de forma puramente deductiva; de hecho, es completamente inverosímil que algunos resultados (por ej., las geometrías no-euclídeas) pudieran haber sido descubiertos exclusivamente por intuición y/o métodos cuasi empíricos. Incluso dentro del contexto de tal proceso deductivo formal como una axiomatización y definición *a priori*, la demostración puede llevar frecuentemente a nuevos resultados. Para el matemático profesional la demostración no es, por tanto, un medio de verificación *a posteriori*, sino, a menudo y también, un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva. (Por ej., consúltese Schoenfeld, 1896 y De Jager, 1990).

FIGURA 1. LA GENERALIZACION DE UN RESULTADO

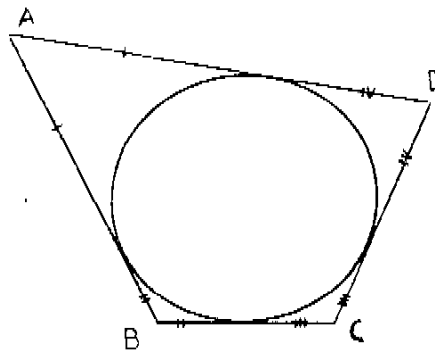


Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo tomado de De Villiers (1990). Supongamos que formulamos accidentalmente la hipótesis, visualmente aceptable, de que EFGH es siempre un rectángulo cuando unimos los puntos medios de los lados de una cometa, como se muestra en la Fig. 1. Aunque podemos adquirir un alto nivel de confianza en la veracidad de esta hipótesis construyendo y midiendo cuidadosamente en diferentes cometas (incluyendo cóncavas), no llegaremos así a una *explicación* satisfactoria de *por qué* es verdad (como se expuso en el párrafo 2.2). Pero si desarrollamos una demostración deductiva, nos damos cuenta inmediatamente de que la perpendicularidad de las diagonales es la *característica esencial* de la cual depende y de que la igualdad de los lados adyacentes no es, por tanto, requerida. (Se deja al lector la demostración). En otras palabras, podemos *generalizar* inmediatamente el resultado a cualquier cuadrilátero con diagonales perpendiculares (un cuadrilátero *perpendicular*), como se muestra a la

El papel y la función de la demostración en matemáticas

derecha en la Fig. 1. Por contra, el resultado general no es sugerido en absoluto mediante la verificación puramente empírica de la hipótesis original. Ni siquiera una investigación empírica sistemática con varios tipos de cuadriláteros hubiera ayudado a descubrir el caso general, pues quizá se hubiera restringido la investigación a cuadriláteros familiares, como paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados y trapecios isósceles.

FIGURA 2. EL ANALISIS DEDUCTIVO DE LAS PROPIEDADES DE UN OBJETO MATEMÁTICO



El teorema de Ceva (1678) fue probablemente descubierto de forma deductiva similar, mediante la generalización de la demostración de la concurrencia de las medianas de un triángulo, y no mediante la construcción real y medición (consúltese De Villiers, 1988). Otro ejemplo donde se da precisamente de esta manera el proceso de descubrimiento deductivo vía generalización deductiva, se describe en De Villiers (1989d). En cualquier caso, los nuevos resultados pueden ser también descubiertos *a priori*, sencillamente analizando de forma deductiva las propiedades de objetos dados. Por ejemplo, sin recurrir a construcciones reales y mediciones, es posible deducir rápidamente que $AB + CD = BC + DA$ en el cuadrilátero *circunscrito* ABCD de la Fig. 2. (Se da una demostración en De Villiers, en prensa (b)).

2.5. La demostración como medio de comunicación

Algunos autores recientes han hecho hincapié en la importancia de la función *comunicativa* de la demostración, por ejemplo:

*«... La demostración aparece como una forma de **discurso**, como medio de **comunicación** entre quienes hacen matemáticas».* (negrita añadida). Voimink (1990:8).

Michael de Villiers

«... reconocemos que el razonamiento matemático está dirigido a una **audiencia humana** que posee un conocimiento de base que permite comprender las intenciones de quien habla o del autor. Al afirmar que el razonamiento matemático no es mecánico ni formal, afirmamos implícitamente lo que es: un **intercambio humano** basado en **significados compartidos**, que no es del todo verbal ni formulístico». (negrita añadida). Davis & Hersch (1986:73).

Análogamente, Davis (1976) ha mencionado también que uno de los valores reales de la demostración es que crea un foro para el análisis crítico. De acuerdo con este punto de vista, la demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre conferenciantes y auditorio, entre profesores y alumnos y entre éstos mismos. El énfasis recae así sobre el proceso social de informar y diseminar el conocimiento matemático en la sociedad. La demostración como forma de interacción social involucra así también la *negociación subjetiva* de no sólo los significados de los conceptos concernidos, sino también, implícitamente, los criterios para una argumentación aceptable. A su vez, tal filtro social de la demostración en las diferentes comunicaciones contribuye a su refinamiento e identificación de errores, así como, a veces, a su rechazo por el descubrimiento de un contraejemplo.

De acuerdo con Thom (1971:679), es precisamente esta influencia reguladora del proceso social la que asegura se eviten errores catastróficos, que podrían haber extraviado durante tiempo indefinido a toda la comunidad matemática. Como ha señalado Hanna (1989b:20), el proceso social es usualmente mucho más importante para la aceptación de un particular resultado y su demostración por parte de los matemáticos que la mera aplicación de ciertos criterios formales para juzgar el rigor lógico de un razonamiento dado.

TABLA 1. UNA COMPARACION ENTRE ALGUNAS DE LAS FUNCIONES DE LA DEDUCCION, INTUICION Y METODOS CUASI-EMPIRICOS

Funciones	Deduc. lógica	Intuición	Quasi-empírico
Verificación de resultados	✓	✓	✓
Explicación de resultados	✓	✓	x
Sistematización del conoc. existente	✓	x	x
Descubrimiento de nuevos resultados	✓	✓	✓
Comunicación de resultados	✓	x	x

Finalmente, aunque las cinco anteriores funciones pueden ser diferenciadas unas de otras, a menudo están intrínsecamente relacionadas en casos específicos. En algunos, ciertas funciones pueden dominar sobre otras, en otros casos, algunas de estas funciones son inexistentes.

El papel y la función de la demostración en matemáticas

En la Tabla 1 se establece una comparación entre las funciones aquí discutidas de la demostración en relación con las de los métodos intuitivos y cuasi-empíricos (De Villiers, 1990:49). A partir de ella, queda claro que la demostración juega un papel casi exclusivo en la *explicación, sistematización y comunicación* de los resultados, lo que no es posible hasta el mismo punto utilizando sólo métodos intuitivos y/o cuasi-empíricos. Por otra parte, también muestra que la demostración no es ni prerequisite para el descubrimiento de los resultados ni condición suficiente para su verificación.

La lista de funciones no es en modo alguno completa. Por ejemplo, podríamos fácilmente añadir la función *estética* o la de *auto-realización personal*, donde la producción de una demostración es vista como «*pedra de toque para probar el aguante y el ingenio del matemático*» (Davis & Hersch 1983:369), pero hemos creído que tales aspectos caían fuera del dominio de este artículo.

3. ALGUNOS COMENTARIOS FINALES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACION

Tradicionalmente, el papel y la función de la demostración en el aula, o bien ha sido completamente ignorado (el hecho de que esté en el programa y «entre» en el examen se considera razón suficiente para darla en clase), o bien se ha presentado como medio de obtención de certeza (esto es, en el contexto de verificación/convicción). De todas formas, como se señala en este artículo, los matemáticos desarrollan a menudo demostraciones por razones bien distintas a las de verificación/convicción. La común idea formalística de muchos profesores de matemáticas de que la convicción es una *cartografía monocromática* de la demostración deductiva (esto es: una función *biyectiva*) debe ser, por tanto, completamente abandonada; *la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción*. Tal aproximación no es sólo deshonesto intelectualmente, sino que no tiene sentido para los alumnos, especialmente cuando se trata de casos evidentes por sí mismos o fácilmente verificables.

Más que el parcial enfoque de la demostración como medio de verificación, la función, más fundamental, de explicación debe ser utilizada para presentar la demostración como una actividad significativa para los alumnos. Al mismo tiempo, debe ponerse atención en la función de descubrimiento y a la de comunicación, negociando con los alumnos los criterios de evidencia aceptable, explicación y/o razonamiento. Más aún, en matemáticas, como puede constatar cualquiera que tenga algo de experiencia, la función exclusiva de sistematización aparece sólo en niveles muy avanzados, por lo que debería omitirse en un curso introductorio de esta materia.

En conclusión, este artículo reclama una visión y un tratamiento más comprensivo de la función y del papel de la demostración que el tradicionalmente aceptado, y ello sobre la base de los siguientes supuestos:

- 1) La enseñanza de las matemáticas debería (al menos en parte) reflejar la *naturaleza* de las matemáticas y lo que es realmente *significativo* para los matemáticos en activo.

Michael de Villiers

- 2) Como seres humanos de funcionamiento cognitivo, los alumnos tienen básicamente la misma *necesidad* de actividades significativas que los matemáticos, lo que incluye el conocimiento, la comprensión y experimentación de la *funcionalidad* (utilidad) de las actividades en las que participan.

REFERENCIAS

- ALBERS, D.J. (1982): «Paul Halmos: Maverick Mathologist». *The Two-year College Mathematics Journal*, 13(4), 234-241.
- ALIBERT, D. (1988): «Towards New Customs in the Classroom». *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31-35;43.
- BELL, A.W. (1976): «A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations». *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- BELL, A.W. (1978): Proof, in Dörfler, W. & Fischer, R. (Eds.). «Beweisen in Mathematikunterricht». *Vorträge des Internationalen symposiums für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt*. Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky.
- DAVIS, P.J. (1976): «The nature of proof». In Carss, M. (Ed.). *Proceedings of the fifth international congress on mathematical education*. Boston: Birkhauser.
- DAVIS, P.J. & HERSH, R. (1983): *The Mathematical Experience*. Great Britain: Pelican Books.
- DAVIS, P.J. & HERSH, R. (1986): *Descartes' Dream*. New York: HBJ Publishers.
- DEER, G.W. (1969): «The effects of teaching an explicit unit in logic on students' ability to prove theorems in geometry». Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. *Dissertation Abstracts International*, 30, 387-399.
- DE JAGER, C.J. (1990): «When should we use pattern?» *Pythagoras*, 23, 11-14.
- DE VILLIERS, M.D. (1986): «The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching» (*RUMEUS Studies in Mathematics Education N° 2*). University of Stellenbosch.
- DE VILLIERS, M.D. (1987): «Algemene beheersingsvlakke van sekere wiskundige begrippe en werkwyses deur voornemende wiskunde-onderwysers». S.A. *Journal of Education*, 7(1), 34-41.
- DE VILLIERS, M.D. (1988): «What happens if? Why?» *Pythagoras*, 18, 45-47.
- DE VILLIERS, M.D. (1989a): «From «TO POLY» to generalised Polyfigures and their classification: A learning experience». *The International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 20(4), 585-603.
- DE VILLIERS, M.D. (1989b): «Meetkunde, meting en intuïsie». *Pythagoras*, 20, 44-45.
- DE VILLIERS, M.D. (1989c): «'n Klassifiserings- en definieringsperiode uit die klaskamer». *Spectrum*, 27(2), (May), 45-49.
- DE VILLIERS, M.D. (1989d): «Meetkunde, verklaring en insig». *Pythagoras*, 21, 33-38.
- DE VILLIERS, M.D. (1990): «Leerlinge se betekenisgewing aan en beheersing van deduksie en verwante wiskundige werkwyses in die konteks van meetkunde». (Pupils' sense-making and mastery of deduction and associated mathematical processes in the context of Geometry). Unpublished doctoral dissertation: University of Stellenbosch.
- DE VILLIERS, M.D. (In press (a)). «Vertical line and point symmetries of differentiable functions». *Pythagoras*.
- DE VILLIERS, M.D. (In press (b)). «Inductive and deductive reasoning: Logic and proof». In Moodley, M. & Njisane, R.M. (Eds.). *Teaching mathematics better*. Pietermaritzburg: Shuter & Shooter.
- DFVLIN, K. (1985): *The Golden Age of Mathematics*. New Scientist.
- DONALDSON, M. (1979): *Children's Minds*. New York: W.W. Norton.
- FISCHBEIN, E. (1982): «Intuition and Proof». *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18.
- FREUDENTHAL, H. (Ed.) (1968): *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen: Wolters.
- FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an education task*. Dordrecht: D. Reidel.
- GALE, D. (1990): «Proof as explanation». *The Mathematical Intelligencer*, 12(1), 4.
- GONOBOLIN, F.N. (1954): Pupils' Comprehension of Geometric Proofs.
- IN WILSON, J.W. (Ed.) (1975): *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. vol. XII, Problems of Instruction. Chicago: University of Chicago.
- HANNA, G. (1983): *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.
- HANNA, G. (1989a): «Proofs that Prove and Proofs that Explain». *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*. Paris, 45-51.
- HANNA, G. (1989b): «More than formal proof». *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.
- HEWSON, S.N.P. (1977): «Inferential problem solving in young children». Unpublished doctoral dissertation: Oxford University.

El papel y la función de la demostración en matemáticas

- HUMAN, P.G. (1978): «Wiskundige werkwyses in Wiskunde-anderwys». Unpublished doctoral dissertation: University of Stellenbosch.
- KLINE, M. (1973): *Why Johnny can't add: the failure of the new math*. New York: St. Martin's Press.
- KILINE, M. (1982): *Mathematics. The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press.
- KRYGOWSKA, A.Z. (1971): «Treatment of the Axiomatic Method in Class». In Servois, W. & Varga, T. *Teaching school mathematics*. Penguin-Unesco. London, 124-150.
- LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Great Britain: Cambridge University Press.
- LAKATOS, I. (1978): *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MANIN, Y.I. (1981): «A Digression on Proof». *The Two-year collegio Mathematics Journal*, 12(2), 104-107.
- MUELLER, D.J. (1975): «Logic and the ability to prove theorem in geometry». Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. *Dissertation Abstracts International*, 36, 851A.
- POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.
- RENZ, P. (1981): «Mathematical Proof: What it is and what it ought to be». *The Two-year Collegio Mathematics Journal*, 12(2), 83-103.
- SCHOENFELD, A.H. (1986): «On Having and Using Geometric Knowledge». In Hiebert, J. (Ed). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- STEINER, M. (1978): «Mathematical explanation». *Philosophical Studies*, 34, 135-151.
- TALL, D. (1989): «The Nature of Mathematical proof». *Mathematics Teaching*, 127, (June), 26-32.
- THOM, R. (1971): «'Modern' Mathematics: An Educational and Philosophical Error?». *American Scientist*, Vol. 159, 695-699.
- VAN DORMOLEN, J. (1977): «Learning to understand what giving a proof really means». *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.
- VAN HIELE, P.M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.
- VOLMINK, J.D. (1990): «The Nature and Role of Proof in Mathematics Education». *Pythagoras*, 23, 7-10.
- WALLINGTON, B.A. (1974): «Some aspects of the development of reasoning in preschool children». Unpublished doctoral dissertation: University of Edinburgh.
- WASON, P.C. & JOHNSON-LAIRD, P.N. (1972): *Psychology of reasoning: Structure and Content*. London: Batsford.
- WALTER, R.L. (1972): «The effect of knowledge of logic in proving mathematical theorems in the context of mathematical induction». Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. *Dissertation Abstracts International*, 33, 262A.
- WILDER, R.L. (1944): «The nature of mathematical proof». *American Mathematical Monthly*, 51, 309-323.

