'n Veralgemening van Pythagoras se Stelling

Deur M D DE VILLIERS en H DU PLOOY, *Hoërskool Diamantveld, Kimberley*

Die oorspronklike idee vir die artikel is deur Hannes du Plooy ('n st 9-leerling) gekry tydens die klasaanbieding van die Stelling van Pythagoras. Mnr M de Villiers, sy onderwyser, het hom gehelp om sodoende hierdie gesamentlike werk die lig te laat sien. 'n Lesing oor die onderwerp is toe deur die leerling self aangebied tydens 'n byeenkoms van die skool se Wiskunde- en Wetenskapklub.

Die veralgemeende Stelling van Pythagoras

Vir enige driehoek waarin hoogstens twee sye gelyk is, bestaan daar 'n getal p, sodat die een sy verhef tot die mag p gelyk is aan die som van die ander twee sye, wat elkeen ook verhef is tot die mag p.

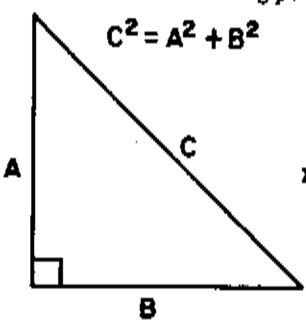


Fig 1

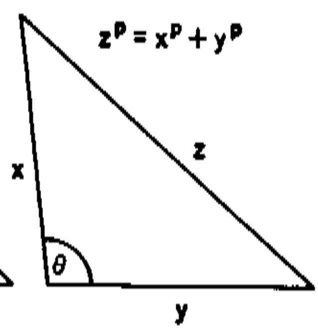


Fig 2

Die bostaande stelling word geïllustreer in Fig 2. Dit is duidelik 'n veralgemening van Fig 1. Die teorie is saamgevat in die volgende drie stellings.

Stelling I

Vir enige driehoek met sye $z > y \geqslant x$ en hoek θ teenoor z bestaan daar 'n getal $p > 1$, sodat $z^p = x^p + y^p$, en $p \lesseqgtr 2$ namate $\theta \gtreqless 90°$.

Stelling II

Vir enige driehoek met sye $z < y \leqslant x$ bestaan daar 'n negatiewe getal p, sodat $z^p = x^p + y^p$.

Stelling III

(a) Indien $x = y$ in Stellings I of II slegs θ is gegee, kan in geslote vorm opgelos word dat

$$p = p(\theta) = \frac{\log 4}{\log 2(1-\cos\theta)}.$$

Verder as $x \neq y$, is $p \gtreqless p(\theta)$ namate $\theta \lesseqgtr 90°$.

(b) Indien $x = y$ in Stellings I of II en x en z is gegee, kan in geslote vorm opgelos word dat $p = \dfrac{\log 2}{\log (\frac{z}{x})}$.

Streng bewyse vir Stellings I en II benodig Rolle se stelling, wat egter nie op skoolvlak formeel behandel word nie. Stelling III se formules sal afgelei word in die opvolgende illustrasiestof.

ILLUSTRASIESTOF

Geval 1 (Ongelyksydige driehoeke)

Beskou eerstens die algemene geval van ongelyksydige driehoeke. Dus:

$$x \neq y \neq z \text{ en } z > y > x.$$

Dan is: $z^p = x^p + y^p$ (Stelling I).

(a) Gestel $p = 0$ $\quad z^0 < x^0 + y^0 \quad (1 < 1 + 1)$

(b) Gestel $p = 1$ $\quad z^1 < x^1 + y^1 \quad$ ($z < x + y$ in enige driehoek)

(c) Gestel $p = 2$ (1) dan is $z^2 > x^2 + y^2$ vir 'n *stomphoekige* driehoek;
of (2) $z^2 < x^2 + y^2$ vir 'n *skerphoekige* driehoek;
of (3) $z^2 = x^2 + y^2$ vir 'n *reghoekige* driehoek;

(d) Let op uit (a) en (b) dat p nooit tussen 0 en 1 kan wees nie. Vergelyk met Stelling I.

Stomphoekige driehoek ($\theta > 90°$)

Uit bostaande behoort dit duidelik te wees dat vir 'n stomphoekige driehoek p altyd tussen 1 en 2 moet wees, want vir $p = 1$ is $z^p < x^p + y^p$, en vir $p = 2$, is $z^p > x^p + y^p$. Vergelyk met Stelling I.

Beskou byvoorbeeld die driehoek hieronder:

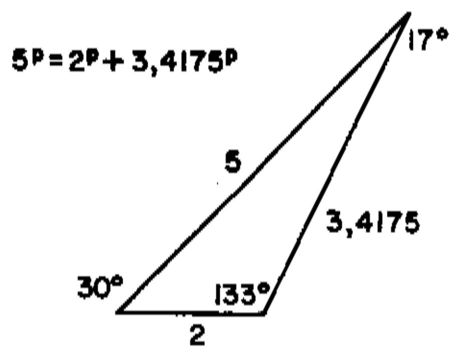


Fig 3

Stel 'n tabel op met in agneming dat $1 < p < 2$. Die metode *van DESIMAALSOEKE kan nou toegepas word omp* te bereken.

p	5^p	2^p	$3{,}4175^p$	
1	5	2	3,4175	$5 < 2 + 3{,}4175$
1,1	5,8731	2,1435	3,8644	$5^p < 2^p + 3{,}4175^p$
1,2	6,8986	2,2974	4,3697	$5^p > 2^p + 3{,}4175^p$

Dit is duidelik uit die tabel dat $1{,}1 < p < 1{,}2$. Waardes van p tussen 1,1 en 1,2 kan nou in die tabel ingestel word.

p	5^p	2^p	$3{,}4175^p$	
1,11	5,9684	2,1585	3,9122	$5^p < 2^p + 3{,}4175^p$
1,12	6,0652	2,1735	3,9605	$5^p < 2^p + 3{,}4175^p$
1,13	6,1636	2,1886	4,0095	$5^p < 2^p + 3{,}4175^p$
1,14	6,2636	2,2038	4,0591	$5^p > 2^p + 3{,}4175^p$

Die waarde van p lê dus tussen 1,13 en 1,14, hoewel heelwat nader aan 1,14, aangesien: $5^{1{,}14} = 6{,}2636$ en $2^{1{,}14} + 3{,}4175^{1{,}14} = 6{,}2629$.

In die algemeen, beskou weer die vergelyking:

$$z^p = x^p + y^p$$

$$p \log z = \log (x^p + y^p)$$

$$p = \frac{\log (x^p + y^p)}{\log z}$$

p kan uit hierdie vergelyking bereken word deur middel van 'n ITERASIEPROSES. In die geval van die driehoek hierbo sal

$$p = \frac{\log (2^p + 3{,}4175^p)}{\log 5}$$

Kies as eerste raaiskoot $p_1 = 1$, en stel in die regterkant van die vergelyking in. Dan is die tweede raaiskoot p_2:

$$p_2 = \frac{\log (2 + 3{,}4175)}{\log 5} = 1{,}0498.$$

Stel nou weer hierdie waarde in die vergelyking in om p_3 te bereken. Die iterasieproses word in die volgende tabel geïllustreer:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
1	1,0498	1,0818	1,1024	1,1156	1,1242	1,1297

p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
1,1333	1,1356	1,1371	1,1380	1,1387	1,1391	1,1393

p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}
1,1395	1,1396	1,1397	1,1397	1,1397	1,1398	1,1398

p_{22}	p_n	waar $n > 22$
1,1398	1,1398	(tot 4 desimale)

Die waarde van p is dus tot 4 desimale 1,1398. Aangesien die iterasieproses baie stadig is, was dit nodig om 'n rekenaarprogram op HP 33 E te skryf vir die bepaling van p.

Skerphoekige driehoek ($\theta < 90°$)

Vir 'n skerphoekige ongelyksydige driehoek sal p altyd groter wees as 2, aangesien $z^2 < x^2 + y^2$ (skerphoekige driehoek).

Beskou byvoorbeeld die driehoek hieronder:

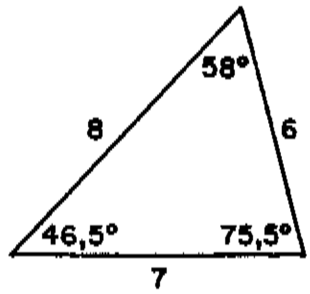


Fig 4

Dus $8^p = 6^p + 7^p$ waar $p > 2$. Vergelyk met Stelling I. Aangesien $8^3 < 6^3 + 7^3$, maar $8^4 > 6^4 + 7^4$ is, volg dit dat p lê tussen 3 en 4. Die waarde van p kan nou akkuraat bereken word deur middel van desimaalsoeke of 'n iterasieproses met die formule:

$$p = \frac{\log (6^p + 7^p)}{\log 8}.$$

p is na 'n lang iterasieproses, tot vier desimale, vir bogenoemde driehoek gelyk aan 3,4579. (Sien Finale Opmerking vir meer oor hierdie waarde van p).

Reghoekige driehoeke ($\theta = 90°$)

Die welbekende stelling van Pythagoras kan hier gebruik word. Aangesien $z^2 = x^2 + y^2$, volg dat $p = 2$, vir alle reghoekige driehoeke, ook in geval 2 hieronder.

Geval 2 (Driehoeke met twee gelyke sye)

(a) Beskou weer eens die algemene formule: $z^p = x^p + y^p$. As die formule waar is, dan moet

$\sqrt[p]{x^p + y^p} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}$ (Sien Fig 2)

want $z = \sqrt[p]{x^p + y^p}$, en $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}$

(Kosinus-formule)

Stel $x = y$, dan volg:

$$\sqrt[p]{x^p + y^p} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}$$

$$\sqrt[p]{2x^p} = \sqrt{2x^2 - 2x^2 \cos\theta} \ldots (x = y)$$

$$\sqrt[p]{2x^p} = \sqrt{2x^2 (1 - \cos\theta)}$$

$$\sqrt[p]{2} = x\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

Neem logs

$$\frac{1}{p} \log 2 = \frac{1}{2} \log 2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{p} \log 4 = \log 2(1 - \cos\theta)$$

$$p = \frac{\log 4}{\log 2(1 - \cos\theta)} \text{ (Sien Stelling IIIa).}$$

Dit is interessant om op te let in die formule dat wanneer $\theta = 90°$, $p = 2$ word; dit wil sê die bekende stelling van Pythagoras. Verder in die limietgeval waar $\theta = 180°$, word $p = 1$, dit wil sê: $z = x = y$. In die geval val x en y dus saam met z.

(b) Indien $x = y$ en z is gegee, stel $x = y$ in

$$z^p = x^p + y^p$$
$$\therefore \quad z^p = 2x^p$$
$$\left(\frac{z}{x}\right)^p = 2$$

Neem logs $p \log\left(\frac{z}{x}\right) = \log 2$

$$p = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{z}{x}\right)} \quad \text{(Sien Stelling IIIb)}$$

Stomphoekige driehoeke

Hier is $x = y \neq z$ en $z > x = y$, $\theta > 90°$.
Beskou as voorbeeld die volgende driehoek:

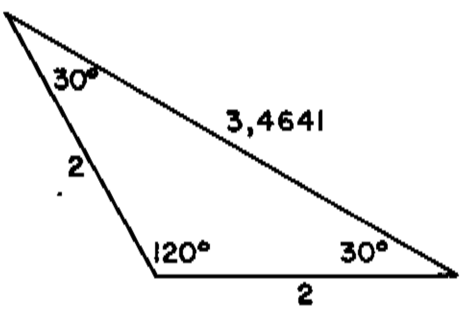


Fig 5

Aangesien dit 'n stomphoekige driehoek is, moet p tussen 1 en 2 wees (Stelling I).

Uit bostaande formule (Stelling III) volg:

$$p = \frac{\log 4}{\log 2(1 - \cos 120°)} = 1{,}2619$$

OF

$$p = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{3{,}4641}{2}\right)} = 1{,}2619$$

Toets deur instelling: $2^{1{,}2619} + 2^{1{,}2619} = 4{,}7961$

en $3{,}4641^{1{,}2619} = 4{,}7961$

Skerphoekige driehoeke

Daar kan twee tipes skerphoekige driehoeke in hierdie geval onderskei word.

Eerste tipe: Hier is $x = y \neq z$ en $z > x = y$, $60° < \theta < 90°$. Sien Stelling I. Beskou as voorbeeld die volgende driehoek:

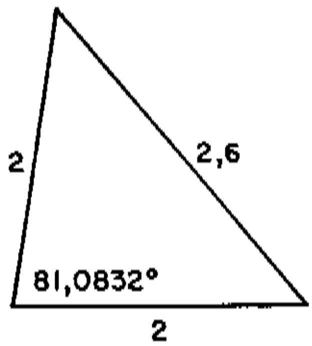


Fig 6

Dan is $p = \dfrac{\log 4}{\log 2\,(1 - \cos 81{,}0832°)}$

$= 2{,}6419$

Of in die formule: $p = \dfrac{\log 2}{\log\left(\frac{2{,}6}{2}\right)} = 2{,}6419$

Dié waarde van p is dus ook hier groter as 2, soos vroeër reeds aangetoon.

Tweede tipe: Hier is $x = y \neq z$ en $x = y > z$, $0° < \theta < 60°$. (Vergelyk met Stelling II) Beskou as voorbeeld die volgende driehoek:

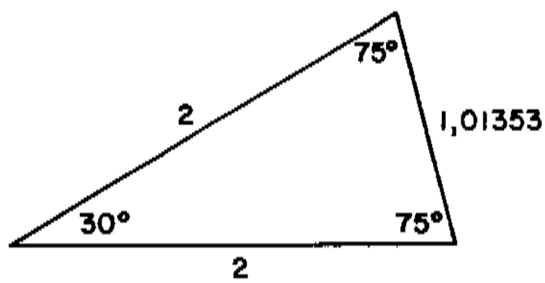


Fig 7

Dit is duidelik dat dit hier onmoontlik is om 'n getal p te vind waarvoor $2^p = 2^p + 1{,}0353^p$. Probeer egter die oplos van die volgende vergelyking: $1{,}0353^p = 2^p + 2^p$

In die algemeen, vir $z < y = x$, geld:
As $p \geqslant 0$, is $z^p < x^p + y^p$.
Beskou dus die geval hierbo.

(1) As $p = 2$, is $1{,}0353^2 < 2^2 + 2^2$
(2) As $p = 1$, is $1{,}0353 < 2 + 2$
(3) As $p = 0$, is $1 < 1 + 1$
(4) As $p = -1$, is $1{,}0353^{-1} = 0{,}9659 < 0{,}5 + 0{,}5$
(5) As $p = -2$, is $1{,}0353^{-2} = 0{,}9330 > 0{,}25 + 0{,}25$

Gevolglik lê die waarde van p tussen -1 en -2. (Sien Stelling II). Deur so verder die metode van desimaalsoeke toe te pas, kan p bereken word.

Kom ons probeer egter nou die formule:

$$p = \frac{\log 4}{\log 2\,(1 - \cos\theta)} \text{ (Stelling III(a))}$$

$$= \frac{\log 4}{\log 2\,(1 - \cos 30^\circ)}$$

$$\doteq -1{,}0526$$

Toets in vergelyking:

$1{,}0353^{-1{,}0526} \doteq 0{,}9641$ en $2^{-1{,}0562} + 2^{-1{,}0562} = 0{,}9642$

$$OF \quad p = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1{,}0353}{2}\right)} = -1{,}0527 \text{ (Stelling III(b))}$$

Geval 3 (Gelyksydige driehoeke)

In die geval van gelyksydige driehoeke soos hieronder:

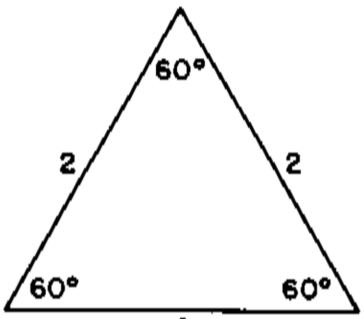


Fig 8

is dit duidelik dat daar geen oplossing kan wees vir $2^p = 2^p + 2^p$

FINALE OPMERKING

Die ooreenkoms van hierdie veralgemeende stelling van Pythagoras met die laaste teorema van Fermat, wat nog nooit bewys is nie, is opvallend. Fermat se laaste teorema beweer dat daar vir die vergelyking: $x^n + y^n = z^n$ *geen* oplossing in nie-nul heelgetalle van x,y en z bestaan as n 'n *heelgetal* groter is as 2. Vir $n = 2$ is daar 'n oneindige aantal oplossings, bv. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$, ens. Met behulp van 'n rekenaar is vasgestel dat die teorema waar is vir $n \leqslant 25\,000$.

Fermat se laaste teorema impliseer dan in ons geval dat vir $p = 3;4;5;\ldots$ geen *skerphoekige* driehoek getrek kan word waarvan al drie die sye *heeltallige* waardes het nie; OF andersins gestel: Vir geen skerphoekige driehoek met *heeltallige* sye sal p 'n *heelgetal* groter as 2 wees nie. Sien byvoorbeeld die skerphoekige driehoek in Fig 4. ○

LETTERS — BRIEWE

'n Kritiese leser wat anoniem wil bly, skryf soos volg:

Die simbole $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$ en $\neq$ word daagliks deur duisende leerlinge (en onderwysers) gebruik. Ongelukkig word hulle dikwels só ingespan dat dit wat die gebruiker daarvan wou sê, verlore gaan en aanleiding gee tot slordige wiskunde, en meer dikwels tot foutiewe wiskunde. By die gebruik van hierdie simbole moet die volgende in gedagte gehou word:

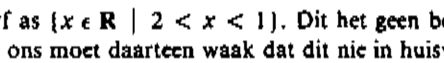
Ons skryf $x \leq y$ om aan te dui dat x kleiner of gelyk is aan y; daarom is beide $1 \leq 2$ en $2 \leq 2$ in orde. Dieselfde geld vir die simbool $\geq$. Die betekenis van $x < y$ is dat x kleiner is as y; $2 < 2$ is dus foutief.

Die meeste foute word egter begaan as hierdie simbole aaneengeskakel word: Met $x = y = z$ word bedoel dat x gelyk is aan y en dat y gelyk is aan z, waaruit volg dat ook x gelyk is aan z. Wat beteken $x \neq y \neq z$? Al wat ons hieruit kan aflei, is dat x ongelyk is aan y en dat y ongelyk is aan z, maar nie dat x ongelyk is aan z, byvoorbeeld $1 \neq 2 \neq 1$. As ons dus wil sê dat x, y en z drie verskillende getalle is, mag dit nie geskryf word as $x \neq y \neq z$ nie.

Met $x < y < z$ word bedoel dat x kleiner is as y en dat y kleiner is as z, waaruit volg dat ook x kleiner is as z. As ons die reële getalle wat kleiner is as 2 en tegelykertyd groter is as 1 (dws die getalle tussen 1 en 2)

wil aandui, word dit geskryf as $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\}$.

Leerlinge kom dikwels in die versoeking om ook die komplement van die versameling hierbo (dit wil sê die reële getalle wat kleiner is as 1 of groter is as 2)



te skryf as $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 1\}$. Dit het geen betekenis nie, en ons moet daarteen waak dat dit nie in huiswerk en toetse voorkom nie.