DOKAZIVANJE I DOKAZ U NASTAVI MATEMATIKE POMOĆU SKETCHPADA I DRUGI TEKSTOVI

GSP 5.03HR

MICHAEL DE VILLIERS

BIBLIOTEKA HUNI

HUNI

Naslov originala:

Michael de Villiers:
Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi

Glavni urednik: Petar Mladinić

Urednici: Petar Mladinić & Nikol Radović

Recenzentice: Sanja Antoliš, Branka Antunović Piton, Nives Baranović, Aneta Copić, Snježana Lukač, Mia Milun, Nikol Radović, Eva Špalj

Lektorica: Franka Krešić

Korektor: Petar Bonačić

Nakladnik: Hrvatska udruga nastavnika istraživača, Zagreb, 2021.

CIP dostupan u računalnom katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem xxxx

ISBN 978-953-49726-0-1 (tisak)

ISBN 978-953-49726-1-8 (PDF)

Tisak: Tiskara Zelina, Sveti Ivan Zelina

www.huni.hr/nastava-matematike/

Slog i prijelom: $P\overset{\heartsuit}{i}erreM$

Dizajn naslovnice i omota: Iva Risek

DOKAZIVANJE I DOKAZ
u nastavi matematike pomoću SKETCHPADA

&

drugi tekstovi

Michael de Villiers

HUNI
Zagreb, 2021.

Riječ, dvije ...

Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH odobrilo je i preporučilo realizaciju projekta *Matematički edukator za osnovne i srednje škole* završnom rečenicom: *"Sukladno svemu navedenome, a temeljem dostavljene dokumentacije, Ministarstvo znanosti i obrazovanja daje pozitivno mišljenje i podupire provođenje navedenih projekata."*

Cjelovito odobrenje i preporuku te cjeloviti elaborat projekta nalazi se na web stranici `https://www.huni.hr/edukacija/`.

Projekt je HUNI osmislio nakon višegodišnjeg istraživanja i testiranja učenika osnovnih i srednjih škola u projektu *van Hieleova razina matematičkih postignuća učenika u RH*. Taj je projekt ukazao da naši učenici loše znaju jedan od temeljnih pojmova matematike - pojam funkcije. Testove i rezultate istraživanja može se vidjeti na `https://www.huni.hr/projekti/`.

Projekt *Matematički edukator za osnovne i srednje škole* osmišljen je u cilju promjene načina poučavanja i učenja školske matematike sukladno van Hieleovim razinama znanja. U tu je svrhu i uključeno upoznavanje i uporaba najboljeg svjetskog softvera *Sketchpad* i njegove hrvatske inačice **Sketchpad 5.03HR** te educiranje nastavnika i učenika. U prvom koraku se educiraju nastavnici kako bi oni nakon edukacije mogli tako svoje učenike poučavati. U projekt je uključeno stotinjak osnovnih i srednjih škola s tristotinjak nastavnika.

Pojavila se i potreba za knjigom **Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketshpada i drugi tekstovi** koju je napisao **Michael de Villiers**, a neke dodatne tekstove koji su uključeni u knjigu još neki naši i strani nastavnici.

Očekujemo da će uporabom ove knjige i poučavanja matematike pomoću Sketchpada i na ovaj način naši učenici postizati bolje rezultate i imati veće kompetencije i samopouzdanje. Uporabom Sketchpada u poučavanju i učenju neki učenici mogu postići 4. i 5. van Hieleovu razinu znanja, a svi ostali postići treću razinu koju van Hieleov model teoretski predviđa.

U knjizi se nalazi tekst o teoremu koji je otkrio i dokazao **Dancan Clough** učenik 11. razreda srednje škole. Ovaj tekst je ilustracija kako se sa Sketchpadom može dostići 4. i 5. van Hieleova razina.

Tekstovi u 8. poglavlju *Dodatni tekstovi* ilustracija su kako nastavnici uporabom Sketchpada otkrivaju nove činjenice u elementarnoj geometriji.

Tekstovi na engleskom jeziku preuzeti su izvorno iz stranih časopisa s naznakom izvora i na bijeloj su podlozi.

Svaki opisani matematički sadržaj i rad na njemu zamišljen je kao radni listić uz uporabu predloženih Sketchpadovih datoteka. Te su datoteke sastavni dio ove knjige i dane su u privitku.

Nazivi datoteke za rad na margini su stranica označeni velikom ikonom Sketchpada, tj. ukazuju nastavniku koju datoteku može uporabiti u aktivnostima i pitanjima koja su također na margini označena malom ikonom.

Na marginama se nalaze i uokvirene upute za uporabu Sketchpadovih alata. Te upute su namijenjene nastavnicima s manjim iskustvom u radu s alatima.

Poseban dodatak ili nastavak ove knjige je i knjiga
Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada - priručnik za nastavnike u kojem se nalaze upute, odgovori na postavljena pitanja i rješenja zadataka u svakoj aktivnosti.

U knjizi *Dokazivanje i dokazi u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi* autor Michael de Villiers navodi nas na promišljanje o jednom od osnovnih pojmova u matematici - *dokazu*. Pri tome propituje uobičajeno tumačenje riječi dokaz kao potvrde neke matematičke tvrdnje te otvara nove poglede na svrhu dokaza kao i na doprinos dokaza pri konstruiranju novih znanja.

Čitatelj će tako osvijestiti da postoje različite svrhe dokaza: *dokaz kao objašnjenje, kao otkriće, kao provjera, kao izazov, kao sistematizacija*.

Svaka od ovih uloga dokaza teorijski je obrazložena i popraćena brojnim potpuno razrađenim primjerima aktivnosti za učenike. Za nastavnika knjiga predstavlja prekrasno vrelo teorijskih pogleda na to što bismo s učenicima mogli raditi i konkretnih materijala koji pokazuju na koji je to način moguće učiniti. Primjena tehnologije sastavni je dio svih predloženih aktivnosti. No, tehnologija nije sama sebi svrha već je uvijek u funkciji metodike nastave matematike. Ona je snažno podupiruće sredstvo koje će omogućiti učeniku otkrivanje matematičkih svojstava, propitivanje uzroka i posljedica te razumijevanje veza među matematičkim objektima.

Posebnu zahvalnost upućujemo **Sanji Antoliš, Branki Antunović Piton, Nives Baranović, Aneti Copić, Snježani Lukač, Mii Milun i Evi Špalj** na savjetima, uputama, ispravcima teksta i prijedlozima boljeg uobličavanja knjige.

Nikol Radović & Petar Mladinić

U Zagrebu, prosinac 2021.

Sadržaj

Uvod

U članku objavljenom u *Philosophae Mathematicae* **Rehuda Rav** je postavio zanimljivu situaciju o mogućnosti korištenja močnog računala kojim se može brzo provjeriti je li zamišljena matematička slutnja istinita ili ne. Bi li tako snažan alat bio kraj dokaza kakvog poznajemo danas?

Za nematematičare odgovor "Ne!" je možda iznenađujući. Kako je Rav istaknuo, u matematici je često nebitno je li određena slutnja istinita ili nije. On to pokazuje na primjeru *Goldbachove slutnje*, koja još uvijek nedokazana, ali je pokušaji njezinog dokazivanja otvoraju vrata mnogim novim teorijama:

Pogledajte blago koje je stvoreno u pokušaju dokazivanja Goldbachove slutnje i koliko bi u usporedbi s tim manje značakjna mogla biti njegova konačna "vrijednost istine" ... Pretpostavimo sada da će jednoga dana netko smisliti kontraprimjer Goldbachove slutnje ili dokazati da postoje pozitivni, čak i cijeli brojevi, koji se ne mogu predstaviti kao zbroj dvaju prostih brojeva. Bi li to krivotvorilo ili samo ocrnilo sve veličanstvene teorije, koncepte i tehnike koje su razvijene kako bi se dokazala sada pretpostavljena netočna slutnja? Ništa od toga! Osporavanje Goldbachove slutnje samo bi usmjerilo mnoštvo **novih razvoja** *bez i najmanjeg utjecaja na do sada razvijene* **metode** *u pokušaju dokazivanja slutnje. Jer odmah bismo postavili nova pitanja poput broja "ne-goldbachovih" cijelih brojeva: konačno mnogo ili beskonačno mnogo? ... Tako bi se usporedno starom gomilalo novo blago. Takav je put dokaza u matematici!*

Nešto dalje Rav naglašava da su dokazi, prije nego teoremi, nositelji matematičkog znanja.

Teoremi su u određenom smislu samo etikete, naljepnice na dokazu, sažetci informacija, naslovi vijesti, urednički uređaji ... Cijeli arsenal matematičke metodologije, koncepata, strategija i tehnika za rješavanje problema, uspostavljanje međusobnih veze između teorija, sistematizacija rezultata, tj. čitavo matematičko znanje je ugrađeno u dokaze ... Dokazi su kao mreže cesta u sustavu javnog prijevoza, a tvrdnje teorema su kao autobusne stanice. Mjesto zaustavljanja je samo pitanje pogodnosti.

Na sličan način, matematičar-istraživač **Gian-Carlo Rota** (1997, 190) istaknuo je, u vezi s nedavnim dokazom posljednjeg Fermatovog teorema,

da vrijednost dokaza ide daleko iznad same puke provjere rezultata:

Stvarna vrijednost onoga što su **Wiles** *i njegovi suradnici učinili daleko je veća od pukog dokaza hirovite slutnje. Smisao dokaza posljednjeg Fermatovog teorem otvorio je nove mogućnosti za matematiku ... Vrijednost Wilesovog dokaza nije u onome što dokazuje, već u onome što je potaknuo i u onome što omogućuje.*

Dvije važne ideje jasno proizlaze iz gore navedenih citata. Prvo, dokazi su neizostavan dio matematičkog znanja i, njihova vrijednost nadilazi puku provjeru rezultata. Prva ideja je očito bila glavni motivacijski faktor za pisanje ove knjige, posebno s obzirom na moguće zablude kako će novi moćni računalni alati poput Sketchpada učiniti dokaz zastarjelim. Iako nam takvi alati omogućuju stjecanje uvjerenja kroz vizualizaciju ili empirijsko mjerenje, dokazi su i dalje važni kao i uvijek. Prema drugoj ideji, dokazi su iznimno vrijedni jer mogu pružiti uvide, voditi do novih otkrića ili pomoći u sistematizaciji. Ove višestruke uloge dokaza glavne su ideje oko kojih je ova knjiga organizirana. U mnogim aspektima ova knjiga omogućuje radikalno odstupanje od tradicionalnih pristupa u dokazivanju, koji su se gotovo isključivo fokusirali samo na verifikacijsku ulogu dokaza. Umjesto toga, ovdje je dokaz predstavljen u poglavlju 2. kao alat za objašnjavanje rezultata koji su već eksperimentalno provjereni Sketchpadom. Sljedeća poglavlja ističu otkriće, provjeru, osporavanje i sistematizaciju kao uloge dokaza. Ove uloge dokaza detaljno se raspravljaju u odjeljku *Uloga dokazivanja pomoću Sketchpada* u poglavlju *1. Uloga dokaza*. Taj se odjeljak preporučuje kao podloga za razmatranje aktivnosti.

Druga preporučena pozadina za razmatranje je odjeljak *Van Hieleova teorija - definiranje i dokazivanje u Sketchpadovom kontekstu*, koji postavlja učenje i poučavanje dokaza u širi kontekst smislenog učenja geometrije. I taj se odjeljak usredotočuje na pojedinosti u matematičkom procesu definiranja, tvrdeći da učenicima ne treba dati gotove definicije, već ih aktivno uključiti u izgradnju definicija.

Predložene sekvence

Budući da su aktivnosti grupirane oko različitih uloga dokaza, ne predlažem da nužno radite redoslijedom kojim se pojavljuju u knjizi. Sljedeće tablice prikazuju tri različita prijedloga za izvođenje niza aktivnosti: jedan kompletan (C), jedan srednji (M) i jedan kratki (S). Brojevi u svakom stupcu označavaju predloženi poredak. Trebali biste slobodno odabrati aktivnosti i slijediti ih prema vlastitom odabiru uz uvjet da su učenici aktivni sudionici i da imaju potrebno predznanje.

Dokaz kao objašnjenje	**kompletno**	**srednje**	**kratko**
Udaljenost u jednakostraničnom trokutu	1	1	1
Opskrba vodom I.: Četiri grada	2	2	2
Opskrba vodom II.: Četiri grada	3	3	3
Zbroj veličina kutova u trokutu	4	4	4
Zbroj veličina kutova u četverokutu	5	5	5
Zbroj veličina kutova u četverokutu I.	6		
Jednakokračni trapez	7	6	
Tetivni četverokut	14		
Težište trokuta	17	13	

Dokaz kao otkriće	**kompletno**	**srednje**	**kratko**
Polovišta zmaja	8	7	6
Logičko otkriće	11	10	9
Polovišta jednakokračnog trapeza	12	11	3
Logičko otkriće: tangencijalni četverokut	16		

Dokaz kao provjera	**kompletno**	**srednje**	**kratko**
Površine	9	8	7
Varignonova površina	10	9	8
Logički paradoks	13	12	
Razmatranje o tetivnom četverokutu	15		
Konkurentnost	18	14	
Visine trokuta	19	15	
Zraka svjetlosti u trokutu	20		
Usporedni pravci	23		

Dokaz kao izazov	**kompletno**	**srednje**	**kratko**
Simetrale kutova paralelograma	21	16	
Paralelogramski kvadrati	22	17	
Točka Fermat-Torricelli	24		
Problem zračne luke	25		
Napoleonov problem	26		
Miquelov problem	27		

Dokaz kao sistematizacija	**kompletno**	**srednje**	**kratko**
Zaključivanje unatrag: polovišta trokuta	28	18	10
Zaključivanje unatrag: usporedni pravci	29		
Sistematiziranje svojstava romba	30	19	
Sistematiziranje svojstava jednakokračnog trapeza	31		

1. Uloga dokaza

Michael de Villiers u radu s nastavnicima u Hrvatskoj

Uloga i svrha dokazivanja pomoću Sketchpada

Da učenici imaju teškoće u shvaćanju stvarne potrebe za dokazom dobro je poznato svim srednjoškolskim nastavnicima i identificirano je bez iznimke u svim obrazovnim istraživanjima kao veliki problem u poučavanju dokazivanja.

Koji nastavnik nije doživio frustraciju kada se suočio s učenicima koji pitaju "Zašto moramo to dokazivati?" Sljedeći zaključak **Gonobolina** (1954, 61) primjer je tog problema:

... učenici ... ne mogu ... prepoznati neophodnost logičkog dokaza posebno geometrijskih poučaka kad su ti dokazi vizualno očiti ili se lako mogu empirijski utvrditi.

Prema **Afanasjewu** u Freundetal (1958, 29) uzrok učeničkih problema s dokazom ne bi se trebao pripisivati samo njihovom sporom kognitivnom razvoju (na primjer, nemogućnosti logičkog razmišljanja), već i činjenici da oni možda ne vide smisao (značenje, svrhu i korisnost) dokazivanja. Zapravo, nekoliko nedavnih studija koje su u suprotnosti s **Piagetovim**, pokazalo je da su vrlo mala djeca prilično sposobna za logičko zaključivanje u situacijama koje su za njih stvarne i smislene (Wason i Johnson-Laird 1972; Wallington 1974; Hewson 1977; Donaldson 1979). Pokušaji istraživača da poučavaju logiku učenicima nisu doprinjeli statistički značajnijim razlikama pri izvedbi i uvažavanju dokaza od strane učenika (Deer 1969; Walter 1972; Mueller 1975). Više od svega, to je temeljno pitanje koje se odnosi na odgovarajuću motivaciju za učenje različitih uloga dokaza, a koju učenici ne percipiraju.

Pitanje je, međutim, "Koju ulogu dokaz ima unutar same matematike i koja se može koristiti u nastavi matematike kako bi dokaz učinili smislenijom aktivnosti?" Svrha ovog odjeljka je opisati neke važne uloge dokaza i ukratko raspraviti o implikacijama za poučavanje dokaza.

Uloga dokaza u matematici

Tradicionalno, dokaz isključivo služi za provjeru ispravnosti matematičke tvrdnje. Ideja da se dokaz uglavnom koristi za uklanjanje osobne sumnje ili sumnje skeptika jednostrano je dominirala u nastavnoj praksi te većini rasprava i istraživanja o poučavanju dokaza. Na primjer, prema **Klineu** i **Alibertu**:

Dokazivanje ima smisla samo ako odgovara na učenikove **sumnje**, *kad dokazuje ono što nije očito.* (Kline 1973, 151)

Potreba i svrha dokazivanje mogu isplivati na površinu samo u situacijama u kojima se učenici susreću s neizvjesnosti o istinitosti matematičke propozicije. (Alibert 1988, 31)

Čini se da **Hanna** i **Volmink** također definiraju dokazivanje samo u uvjetima njegove uloge u provjeravanju:

Dokaz je argument potreban za **potvrdu** *tvrdnje, argument koji može pretpostaviti nekoliko različitih oblika sve dok je uvjerljiv.* (Hanna 1989, 20)

Zašto se trudimo dokazivati poučke? Ja tvrdim da je odgovor: kako bismo mogli **uvjeriti** *ljude (uključujući i nas same) . . . da možemo smatrati* **dokaz kao argument dovoljan za uvjeriti razumnog skeptika**. (Volmink 1990, 8, 10)

Iako se mnogi autori (na primjer, van Dormolen 177, van Hiele 1973, Freundetal 1973 i dr.) slažu da se potreba za strogim deduktivnim dokazom mijenja i vremenom postaje sofisticiranija, oni i dalje smatraju da je uloga dokaza uglavnom provjera. Na primjer:

. . . za napredovanje u strogosti prvi je korak **posumnjati** *u strogost u koju se vjeruje u ovom trenutku. Bez ove* **sumnje** *ne postoji dopuštanje drugim ljudima da propisuju novi kriterij strogosti.* (Freudenthal 1973, 151)

Mnogi su autori također predložili određene faze u razvoju strogosti, na primjer, Tall (1989, 30) koji predlaže tri faze u iznošenju uvjerljivog argumenta: uvjeravanje sebe, uvjeravanje prijatelja i uvjeravanje neprijatelja. Ipak, ovaj prijedlog razmatra samo provjeravajuću ulogu dokaza.

Međutim, kako je istaknuo Bell (1976, 24), ovo gledište provjeravanja kao glavne uloge dokaza "izbjegava razmatranje stvarne prirode dokaza", budući da se uvjerenje u matematici često stječe "sasvim drugim sredstvima a ne samo slijeđenjem logičkog dokaza".

Suvremeno matematičko istraživanje zahtijeva potpuniju analizu svrhe i uloge dokazivanja. Otkrio sam da je koristan sljedeći model za ulogu dokaza u mojem istraživanju u posljednjih nekoliko godina. To je blago proširenje **Bellove** (1976) izvorne razlike između provjere, osvjetljavanja i sistematizacije. U modelu koji je predstavljen ovdje (bez određenog redoslijeda važnosti), dalje se raspravlja o:

- *provjeri (briga o istinitosti izjave)*
- *objašnjenju (pružanje uvida zašto je nešto istinito)*
- *otkriću (otkriće ili stvaranje novih rezultata)*
- *sistematizaciji (organizacija različitih rezultata u deduktivni sustav aksioma, glavnih pojmova i poučaka)*
- *komunikaciji (prijenos matematičkog znanja)*
- *intelektualnom izazovu (samorealizacija/ispunjenje koje proizlazi iz izgradnje dokaza).*

Dokaz kao sredstvo provjere/uvjerenja

Uz neke iznimke, čini se da učitelji matematike vjeruju kako samo dokaz daje sigurnost matematičaru te da je jedini autoritet za utvrđivanje valjanosti naslućivanja. Međutim, dokaz nije nužno preduvjet za uvjerenje. Naprotiv, uvjerenje je vjerojatno daleko češće preduvjet za pronalaženje dokaza. (Zbog kojih bismo čudnih i opskurnih razloga ponekad proveli mjesece ili godine pokušavajući dokazati određene pretpostavke, ako već nismo bili uvjereni u njihovu istinitost?)

Poznati **George Polya** (1954, 83-84) piše:

... nakon što smo teorem provjerili u nekoliko posebnih slučajeva, skupili smo snažne induktivne dokaze za njega. Induktivna faza nadjačala je našu početnu sumnju i dala nam je snažno **povjerenje** *u teorem. Bez takvog povjerenja jedva bismo smogli hrabrosti provesti dokaz koji uopće nije izgledao kao rutinski posao. Kada ste se sami uvjerili da je teorem* **istinit**, *počinjete ga* **dokazivati**.

U situaciji kad uvjerenje prije dokaza rezultira motivacijom za dokazivanjem, onda dokaz mora biti i nešto drugo osim provjere/uvjerenja.

U stvarnim matematičkim istraživanjima, osobno uvjerenje obično ovisi o kombinaciji intuicije, kvazi-empirijske provjere i postojanja logičkog dokaza (ne nužno strogog). Zapravo, vrlo visoka razina uvjerenja se ponekad može postići čak i u odsutnosti dokaza. Na primjer, u raspravi o "heurističnom dokazu" još uvijek nedokazanog teorema o paru blizanaca i poznate Riemannove hipoteze, **Davis** i **Hersh** (1983, 369) zaključuju da su heuristični dokazi "tako snažni da stvaraju uvjerenje čak i bez strogog dokaza".

To uvjerenje matematičari nisu postigli samim dokazom. U časopisu *Mathematical Reviews*, prema priznanju urednika, otprilike je polovica objavljenih tekstova u jednom trenutku bila bez potpunog dokaza. Matematičari istraživači, na primjer, rijetko pregledavaju objavljene dokaze detaljno, jer ih vodi povjerenje u autoritet autora, testiranje posebnih slučajeva i neformalno ocjenjivanje tipa je li se "*metode i rezultat razumno uklapaju ...*" (Davis i Hersh 1986, 67). Također prema Hanni (1989) razumnost rezultata često uživa prioritet nad postojanjem potpuno rigoroznog dokaza.

Prilikom istraživanja valjanosti novog, nepoznatog naslućivanja, matematičari obično ne traže samo dokaz, nego pokušavaju konstruirati i protuprimjere pomoću kvazi-empirijskog testiranja budući takvo testiranje može otkriti skrivene proturječnosti, pogrješke ili neizgovorene pretpostavke. Na taj način konstruirani protuprimjeri ponekad zahtijevaju od matematičara da rekonstruiraju stare dokaze i konstruiraju nove.

Za stjecanje uvjerenja, neuspjeh u opovrgavanju naslućivanja pomoću

eksperimentalne igre ima jednako važnu ulogu kao i proces deduktivnog opravdavanja. Čini se da postoji logička, kao i psihološka, dimenzija za postizanje sigurnosti.

Za logičnu dimenziju, potreban nam je neki oblik deduktivnog dokaza, ali za psihološku dimenziju čini se da nam treba neko eksperimentalno istraživanje ili intuitivno razumijevanje.

Naravno, s obzirom na dobro poznata ograničenja intuicije i same kvazi-empirijske metode, prethodni argumenti definitivno ne namjeravaju zanemariti važnost dokaza kao neophodnog sredstva provjere. Osobito u slučaju iznenađujućih neintuitivnih ili sumnjivih rezultata. Bolje je postaviti pravilnije gledište prema dokazu od iskrivljenog idoliziranog dokaza kao jedinog (i apsolutnog) sredstva provjere/uvjerenja.

Dokaz kao sredstvo objašnjenja

Iako je moguće postići prilično visoku razinu povjerenja u valjanost naslućivanja pomoću kvaziempirijske provjere (na primjer, točnost konstrukcije i mjerenja, numerička zamjena i tako dalje), to općenito ne daje zadovoljavajuće objašnjenje zašto je pretpostavka točna. To samo potvrđuje da je to istina. Mnogobrojni primjeri mogu povećati nečije povjerenje, ali ne mogu dati psihološki zadovoljavajući osjećaj rasvjetljenja kao ni uvid ili razumijevanja naslućivanja kad su ta naslućivanja posljedica drugih poznatih rezultata. Na primjer, unatoč uvjerljivim heurističkim dokazima potvrde ranije spomenute Riemannove hipoteze, netko još uvijek može imati goruću potrebu za objašnjenjem kako su naveli Davis i Hersh (1983, 368):

Zanimljivo je pitati, u ovakvom kontekstu, zašto i dalje osjećamo potrebu za dokazom ... Čini se jasnim da želimo dokaz jer ... ako je nešto istina a ne možemo zaključiti na ovaj način, onda je ovo znak nedostatka razumijevanja s naše strane. Vjerujemo, drugim riječima, da bi dokaz bio način razumijevanja zašto je Riemannova pretpostavka točna. To je nešto više od samog saznanja iz uvjeravanja heurističkim zaključivanjem da je to istina.

Gale (1990, 4) također jasno naglašava, s pozivanjem na Feigenbaumova eksperimentalna otkrića u fraktalnoj geometriji, da je uloga njihovih eventualnih dokaza u tome da je to objašnjenje, a ne provjera:

Lanford i drugi matematičari nisu pokušavali potvrditi Feigenbaumove rezultate više nego, recimo, **Newton** *koji je pokušavao* **potvrditi** *otkrića* **Keplerovih** *planetarnih orbita. U oba slučaja valjanost rezultata nikada nije bila dovedena u pitanje. Nedostajalo je* **objašnjenje**. *Zašto su orbite bile eliptične? Zašto su zadovoljili točno određene odnose? ... postoji bitna razlika između potvrđivanja i objašnjavanja.*

Dakle, u većini slučajeva kada se radi o rezultatima intuitivno samo po sebi razumljivim i koji su podržani uvjerljivim kvazi-empirijskim dokazima

uloga dokaza za matematičara nije provjera nego objašnjenje (ili neka druga uloga koja se opisuje u nastavku).

Zapravo, za mnoge matematičare aspekt pojašnjenja/objašnjenja dokaza je važniji od aspekta provjere. Na primjer, poznati **Paul Halmos** je prije nekog vremena izjavio da, iako je računalo pomoglo u dokazivanju teorema o četiri boje, **Appel** i **Haken** su ga uvjerli da je to istina. Ipak on osobno preferira dokazivanje koje daje "razumijevanje" (Albers 1982, 239-240).

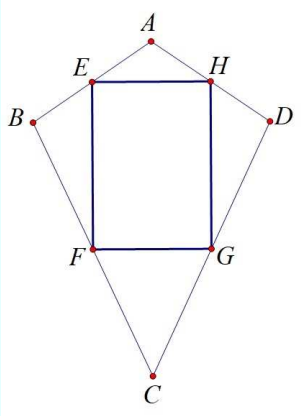
Manin (1981, 107) i Bell (1976, 24) također vjeruju da je objašnjenje kriterij za "dobar" dokaz kada kažu da je to "ono što nas čini da smo mudrijima" i da se od dokaza očekuje "da osigura uvid u to zašto je tvrdnja istinita."

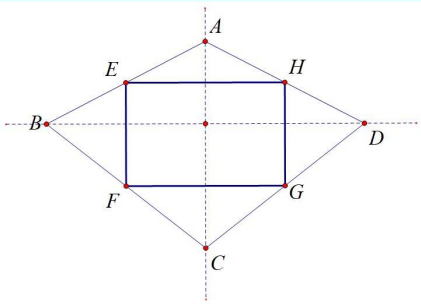
Dokaz kao sredstvo otkrivanja

Često se kaže da se teoremi najčešće prvi put otkrivaju pomoću intuicije i/ili kvazi-empirijskih metoda, prije samog dokazivanja. Međutim, u povijesti matematike brojni su primjeri otkrivanja i stvaranja novih rezultata na čisto deduktivan način. Zapravo je potpuno malo vjerojatno da su neki rezultati (na primjer, neeuklidske geometrije) mogli biti osmišljeni samo intuicijom i/ili samo pomoću kvazi-empirijskih metoda. U kontekstu takvih formalnih deduktivnih procesa, kao što su aksiomatizacija i definiranje, dokazi često mogu dovesti do novih rezultata. Za matematičara praktičara dokaz nije samo sredstvo provjere već otkrivenog rezultata, nego često i sredstvo za istraživanje, analiziranje, otkrivanje i stvaranje novih rezultata (usporedi Schoenfeld 1986 i de Jager 1990).

Na primjer, razmotrite sljedeći primjer. *Pretpostavimo da smo konstruirali dinamički deltoid Sketchpadom i spojili polovišta stranica oblikujući četverokut $EFGH$ kako je prikazano na slici.*

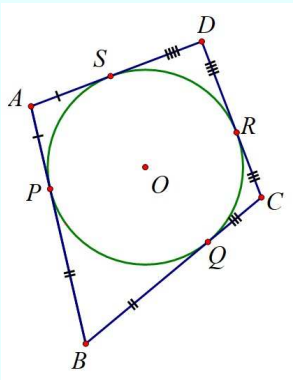
Vizualno, za četverokut$EFGH$ jasno se čini da je pravokutnik, što lako može biti potvrđeno mjerenjem kutova. Povlačenjem bilo kojeg vrha deltoida $ABCD$, deltoid se može povući u novi položaj radi provjere je li $EFGH$ i dalje pravokutnik. Također možemo povući vrh A dok $ABCD$ ne postane nekonveksan (konkavan)te provjeriti ostaje li pravokutnik i dalje. Iako nas takva kontinuirana varijacija lako može uvjeriti u istinitost tvrdnje to ne osigurava zadovoljavajuće objašnjenje zašto je četverokut, kojemu su vrhovi polovišta stranica deltoida, pravokutnik. Međutim, ako provedemo deduktivni dokaz za ovu pretpostavku, odmah primjećujemo da je okomitost dijagonala bitna karakteristika o kojoj ovisi istinitost te da svojstvo jednakih duljina susjednih stranica stoga nije potrebno (v. sl.). (Dokaz prepuštamo čitatelju.)





Drugim riječima, odmah možemo generalizirati rezultat na bilo koji četverokut s okomitim dijagonalama, kako je prikazano na slici iznad. Nasuprot tome, opći rezultat uopće nije podložan čistoj empirijskoj provjeri originalnih hipoteza. Čak ni sustavno empirijsko istraživanje o raznim vrstama četverokuta vjerojatno ne bi pomoglo u otkrivanju općeg slučaja, jer bismo vjerojatno naše istraživanje ograničili na poznate četverokute poput paralelograma, pravokutnika, romba, kvadrata i jednakokračnog trapeza.

Cevin teorem (1678.) vjerojatno je otkriven na deduktivan način sličan generalizaciji iz dokaza za konkurentnost težišnica trokuta, a ne stvarnom konstrukcijom i mjerenjem (vidi de Villiers, 1988). Novi rezultati mogu se otkriti i apriori jednostavnom deduktivnom analizom svojstava danih objekata. Na primjer, bez pribjegavanja stvarnoj konstrukciji i mjerenju, moguće je brzo zaključiti da vrijedi $|AB|+|CD| = |BC|+|DA|$ za četverokut $ABCD$ opisan kružnici (tangencijalni četverokut). To je prikazano u nastavku, primjenom teorema po kojemu su dijelovi tangenata, od točke izvan kružnice do dirališta s kružnicom, međusobno jednaki.



Dokaz kao sredstvo sistematizacije

Dokaz izlaže temeljne logičke odnose između tvrdnji, na način kako to ne mogu kvazi-empirijsko testiranje i čista intuicija. Dokaz je stoga neizostavan alat za sistematiziranje različitih poznatih rezultata u deduktivnom sustavu aksioma, definicija i teorema. Neke od najvažnijih uloga deduktivne sistematizacije poznatih rezultata su sljedeće (de Villiers, 1986):

- Pomaže u identificiranju nedosljednosti, cirkularnih argumenata te pretpostavki koje su skrivene ili nisu izričito navedene.
- Objedinjuje i pojednostavljuje matematičke teorije integriranjem nepovezanih tvrdnji, teorema i pojmova, što dovodi do ekonomične prezentacije rezultata.
- Pruža korisnu globalnu perspektivu ili pogled iz ptičje perspektive na temu izlaganjem temeljne aksiomatske strukture iz koje se sva ostala svojstva mogu izvesti.
- Korisno za primjene unutar i izvan matematike jer omogućuje provjeru primjenjivosti cijele složene strukture ili teorije jednostavnom procjenom prikladnosti njegovih aksioma i definicija.
- Često dovodi do drugih deduktivnih sustava koji osiguravaju nove perspektive i/ili su ekonomičniji, elegantniji i snažniji od postojećih.

Iako su neki elementi provjere očito prisutni, glavni cilj nije "provjeriti jesu li određene tvrdnje doista istinite", već logički organizirati nepovezane pojedinačne tvrdnje, za koje se već zna da su istinite, u *koherentnu jedinstvenu cjelinu*. Zbog globalne perspektive koju osigurava takvo pojednostavljenje i ujedinjenje, postoji, naravno, i poseban element rasvjetljenja prisutan kada se dokaz koristi kao sredstvo sistematizacije. U ovom slučaju, međutim, fokus pada na globalno, a ne lokalno. Dakle, stvarno je lažno tražiti da se trebamo "uvjeriti" u tvrdnju kad smo je dokazali. Primjerice, da su vršni kutovi dvaju pravaca koji se sijeku jednaki. Matematičari su zapravo daleko manje zabrinuti zbog istinitosti takvih teorema nego zbog njihove sistematizacije u deduktivni sustav.

Dokaz kao sredstvo komunikacije

Nekoliko je autora naglasilo važnost komunikacijske uloge dokaza. Primjerice,

... čini se da je dokaz oblik **diskursa**, *sredstvo komunikacije među ljudima koji se bave matematikom.* (Volmink 1990, 8)

... prepoznajemo da je matematički argument upućen publici koja posjeduje pozadinsko znanje koje joj omogućuje razumijevanje namjere govornika ili autora. U navođenju da taj matematički argument nije ni mehanički, ni formalan ... implicitno se tvrdi da **ljudska razmjena** *na temelju zajedničkih značenja, nije sva verbalna ni formalna.* (Davis i Hersh 1986, 73)

Slično, Davis (1976) je također spomenuo da je jedna od stvarnih vrijednosti dokaza stvaranje foruma za kritičku raspravu. Prema ovom gledištu, dokaz je jedinstven način komuniciranja matematičkih rezultata između profesionalnih matematičara, između učitelja i učenika te među samim učenicima. Naglasak stoga pada na društveni proces izvješćivanja i širenja matematičkog znanja u društvu. Dokaz kao oblik društvene interakcije stoga uključuje i subjektivno pregovaranje ne samo o dotičnim pojmovima, već implicitno i o kriterijima prihvaćanja argumenata. Zauzvrat, takva društvena filtracija dokaza u raznim komunikacijama pridonosi njegovom usavršavanju i identifikaciji pogrješki, kao i ponekad njegovom odbacivanju otkrićem protuprimjera.

Dokaz kao sredstvo intelektualnog izazova

Matematičarima je dokaz *intelektualni izazov* koji smatraju privlačnim kao što drugi ljudi pronalaze zagonetke ili kreativne hobije ili nastojanja. Većina ljudi ima dovoljno iskustva, makar samo u pokušaju rješavanja križaljki ili slagalica, koje će im omogućiti razumijevanje izazova koje su imali **Pitagora** i **Arhimed** kad su proslavili otkrića svojih dokaza. Dokazivanje bi se moglo usporediti s fizičkim izazovom završetka napornog maratona ili triatlona i zadovoljstvo koje dolazi poslije. U tom smislu intelektualni izazov dokazivanja rezultira samoostvarenjem i ispunjenjem. Dokaz je stoga teren za intelektualnu izdržljivost i domišljatost matematičara (usporedi Davis i Hersh 1983, 369). Da parafraziram poznati George Malloryjev komentar njegovog razloga penjanja na Mount Everest: *Dokazujemo naše rezultate jer su tamo.* Gurajući ovu analogiju još dalje: često to nije sumnja u postojanje planine (istinit rezultat) već može li se (i kako) to osvojiti (dokazati)!

Konačno, iako se šest uloga dokaza može međusobno razlikovati, često su sve isprepletene u posebnim slučajevima. U nekim slučajevima izvjesne uloge mogu dominirati drugima, dok u drugim slučajevima određene uloge možda uopće neće doći do izražaja. Nadalje, ovaj popis uloga nikako nije potpun. Primjerice, lako bismo mogli dodati *estetsku* ulogu ili ulogu *pamćenja* i razvoja algoritama (Renz 1981 i van Asch 1993).

Poučavanje dokaza pomoću Sketchpada

Kad učenici temeljito istraže geometrijska naslućivanja kroz kontinuirane varijacije s dinamičkim softverom poput Sketchpada, oni nemaju potrebu za daljnjim radom na uvjerenju ili provjeri. Dakle, provjera vrlo malo motivira ili uopće nije motivacija za dokazivanjem. Međutim, uočio sam da relativno lako mogu izazvati daljnju znatiželju pitajući učenike *zašto* misle da je određeni rezultat istinit. Izazvao bih ih time da to pokušaju *objasniti*. Učenici brzo priznaju da induktivna provjera samo potvrđuje, da ne daje zadovoljavajući osjećaj osvjetljenja, uvida ili razumijevanja u to kako je naslućivanje posljedica drugih poznatih rezultata. Učenici tako brzo prihvaćaju da induktivna provjera samo potvrđuje, ali ne daje zadovoljavajući osjećaj rasvjetljenja, uvida ili razumijevanja kako prepostavka proizlazi iz drugih poznatih rezultata.

Također je poželjno rano upoznati učenike s otkrivajućom ulogom dokaza i skrenuti pozornost na komunikacijske aspekte kroz pregovaranje i razjašnjavanje s učenicima kriterije prihvatljivosti dokaza, temeljne heuristike te logike dokazivanja. Verifikacijsku ulogu dokaza treba rezervirati za rezultate u koje učenici iskreno sumnjaju. Iako neki učenici možda neće doživjeti dokaz kao svoj intelektualni izazov, sposobni su cijeniti da ga drugi mogu doživjeti na taj način. Nadalje, u matematici, kao što će posvjedočiti svatko s malo iskustva, čisto sistematizirajuća uloga dokaza dolazi do izražaja samo u poodmakloj fazi i stoga bi trebala biti uskraćena u uvodnom poučavanju dokazivanja. Čini se smisleno u početku upoznati učenike s raznim ulogama dokaza, manje - više u slijedu prikazanom na slici, ali ne na čisto linearan način kao što je prikazano, nego u svojevrsnom spiralnom pristupu, gdje se druge ranije uvedene uloge ponovno pregledavaju i proširuju. Poglavlja ove knjige su organizirana prema ovom slijedu, a nekoliko ih je predlaženo u spiralnom pristupu naznačenom u Uvodu.

Van Hieleova teorija - definiranje i dokazivanje korištenjem Sketchpada

Van Hieleova teorija

Van Hieleova teorija objavljena je u doktorskim disertacijama **Dine van Hiele-Geldof** i njezina supruga **Pierrea van Hielea** sa Sveučilišta Utrecht, Nizozemska, 1957. godine. Dok je Pierreova disertacija uglavnom pokušavala objasniti zašto su učenici imali problema u nastavi geometrije (u tom pogledu bilo je *objašnjenje* i *opis*), Dinina disertacija bila je o nastavnom eksperimentu (u tom smislu više *propisano* o uređenju geometrijskog sadržaja i aktivnostima učenja učenika). Najočitija karakteristika teorije je razlika između pet diskretnih razina mišljenja u razvoju učenikova razumijevanja geometrije.

Prema van Hieleovoj teoriji, glavni razlog neuspjeha tradicionalnog kurikula geometrije je taj što je prezentiran na višoj razini od onih na kojima se učenici kognitivno nalaze. Zbog toga, učenici ne mogu razumjeti učitelja, niti učitelj može razumjeti zašto učenici ne razumiju! Iako **van Hieleova teorija razlikuje pet različitih razina mišljenja**, usredotočit ćemo se na prve četiri razine jer su one najrelevantnije za srednjoškolsku geometriju. Opće karakteristike prvih četiriju razina opisane su u nastavku.

Razina 1: Prepoznavanje

Učenici vizualno prepoznaju likove prema njihovom općem izgledu. Prepoznaju trokute, kvadrate, paralelograme i tako dalje prema njihovom obliku, ali eksplicitno ne identificiraju svojstva tih likova.

Razina 2: Analiza

Učenici počinju analizirati svojstva likova i uče odgovarajuću tehničku terminologiju za njihov opis, ali međusobno ne povezuju likove ili njihova svojstva.

Razina 3: Redanje

Učenici svojstva likova logički redaju u kratke nizove dedukcija i razumiju međusobne odnose između likova (na primjer, klase inkluzije).

Razina 4: Dedukcija

Učenici počinju razvijati dulje nizove tvrdnji i počinju shvaćati značaj dedukcije, ulogu aksioma, teorema i dokaza.

Razlike između prvih triju razina sažeto su prikazane u donjoj tablici u smislu objekata i strukture mišljenja na svakoj razini (Fuys i sur., 1988, 6).

	Razina 1.	**Razina 2.**	**Razina 3.**
Objekti mišljenja	Pojedinačni likovi	Klase likova	Definicije klasa likova
Struktura mišljenja	Vizualno prepoznavanje Imenovanje Vizualno sortiranje	Prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa	Uočavanje i formuliranje logičkih odnosa između svojstva
Primjeri	Svi paralelogrami idu zajedno jer oni "*izgledaju isto.*" Pravokutnici, kvadrati i rombovi nisu paralelogrami jer *ne izgledaju kao oni.*	Paralelogram ima četiri stranice, nasuprotni kutovi su jednakih veličina, nasuprotne stranice su jednakih duljina, nasuprotne stranice su paralelne, dijagonale se raspolavljaju itd. Pravokutnik nije paralelogram budući da pravokutnik ima sve kutove od 90°, a paralelogram nema.	Nasuprotne stranice koje su jednakih duljina implicira da su nasuprotne stranice paralelne. Nasuprotne stranice koje su paralelne podrazumijevaju da su nasuprotne stranice jednakih duljina. Nasuprotni kutovi koji su jednakih veličina podrazumijevaju da su nasuprotne stranice jednakih duljina. Raspolavljanje dijagonala implicira simetriju.

Koristeći interviju temeljen na zadacima, **Burger** i **Shaughnessy** (1986) identificirali su što učenici rade na prve četiri razine.

Razina 1.

1. Često koriste nevažna vizualna svojstva likova za identifikaciju likova, usporedbu, klasifikaciju i opis.

2. Obično se pozivaju na vizualne prototipove likova i lako budu zavedeni orijentacijom likova.

3. Ne mogu zamisliti beskonačnu varijaciju određene vrste lika; na primjer u smislu orijentacije i oblika.

4. Nedosljedno klasificiraju likove; na primjer, koriste neuobičajena ili nevažna svojstva za sortiranje likova.

5. Nepotpuno opisuju (definiraju) likove koristeći nužne (često vizualne) uvjete kao dovoljne uvjete.

Razina 2.

1. Likove eksplicitno uspoređuju služeći se njihovim temeljnim svojstvima.

2. Izbjegavaju klase inkluzije između različitih klasa likova; na primjer, kvadrate i pravokutnike smatraju nepovezanima.

3. Likove sortiraju služeći se samo jednim svojstvom; na primjer, svojstvom stranice, dok druga svojstva, poput simetrije, kutova i dijagonala ignoriraju.

4. Pokazuju neekonomično korištenje svojstava likova pri njihovom opisu (definiranju), umjesto da koriste samo dovoljna svojstva.

5. Izričito odbacuju definicije drugih osoba; na primjer, učitelja ili udžbenika, u korist njihovih vlastitih definicija.

6. Pristupaju utvrđivanju istinitosti tvrdnje empirijski; na primjer, koriste promatranje i mjerenje u nekoliko skica.

Razina 3.

1. Formuliraju ekonomične, korektne definicije likova.

2. U stanju su preoblikovati nepotpune definicije u potpune definicije te ih spontanije prihvatiti i koristiti (definicije) za nove pojmove.

3. Prihvaćaju različite ekvivalentne definicije za iste pojmove.

4. Hijerarhijski klasificiraju likove; na primjer, četverokute.

5. Eksplicitno koriste logički oblik *ako* ... *onda* za formuliranje i obrađivanje naslućivanja te implicitno koriste logička pravila kao što je *modus ponens*.

6. Nesigurni su i nemaju razumijevanja što se tiče uloge aksioma, definicija i dokaza.

Razina 4.

1. Shvaćaju uloge aksioma, definicija i dokaza.

2. Spontano stvaraju naslućivanja i samoinicijativno ih nastoje deduktivno provjeriti.

Prema van Hieleovoj teoriji, deduktivno se zaključivanje prvi put javlja na 3. razini, kada je uspostavljena mreža logičkih odnosa između svojstava. Drugim riječima, kada se izvodi dokaz za jednakost dijagonala pravokutnika, smisao tog dokaza se ostvaruje stvaranjem logičkih veza između konkretnih svojstava. Učenik na 1. ili 2. razini, koji još ne posjeduje ovu mrežu logičkih implikacija, može samo doživjeti takav dokaz kao pokušaj provjere rezultata. Međutim, budući da takvi učenici ne sumnjaju u valjanost svojih empirijskih zapažanja, skloni su to doživljavati kao besmisleno ili "dokazivanje očitog". Stoga treba primijetiti da prijelaz s van Hieleove 1. razine na 2. razinu predstavlja posebne probleme učenicima koji se služe drugim jezikom, budući da prijelaz uključuje stjecanje tehničke terminologije za opisivanje svojstva likova.

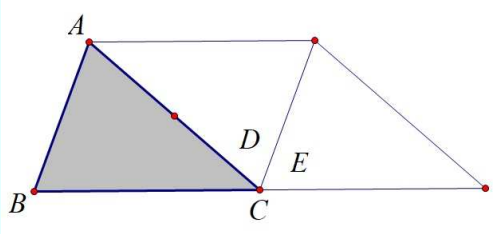
Konceptualno strukturiranje

Važan aspekt van Hieleove teorije je naglašavanje da bi neformalne aktivnosti na 1. i 2. razini trebale osigurati odgovarajuće *konceptualne podstrukture* za formalne aktivnosti na sljedećoj razini. Učitelji često puštaju svoje učenike da izmjere kutove trokuta kutomjerom, a zatim da zbroje kutove kako bi otkrili da je zbroj uvijek jednak 180°. Iz van Hieleove perspektive to je neprikladno budući da ne pruža odgovarajuću konceptualnu podstrukturu u koju je eventualno implicitno ugrađeno logičko objašnjenje (dokaz). Za usporedbu, aktivnost s kartonskim pločicama ili Sketchpadom kako je prikazano na slici, pruža takve podkonstrukcije.

Na primjer, trokut ABC translatirajte za vektor $\overrightarrow{BC}$ i trokut ABC rotirajte oko polovišta stranice $\overline{AC}$.

Neka učenici uoče da povlačevanjem trokuta tri kuta $\angle C$, $\angle D$ i $\angle E$ uvijek čine ispruženi kut. Zatim treba pitati učenike što mogu reći o kutovima $\angle A$ i $\angle B$ u odnosu na kutove $\angle D$ i $\angle E$. Budući da se kut $\angle B$ translacijom preslikava u kut $\angle E$, a kut $\angle A$ centralnom simetrijom u kut $\angle D$, kutovi $\angle B$ i $\angle A$ jednaki su kutovima $\angle D$ i $\angle E$, respektivno.

Jasno je da to osigurava odgovarajuću konceptualnu strukturu za eventualno objašnjenje (dokaz).



Slično, aktivnost mjerenja osnovnih kutova jednakokračnog trokuta i pomicanje trokuta u *Sketchpadu* također je konceptualno neprikladno, ali ukazuje na svojstva njegove osi simetrije koja su temelj za kasnije logičko objašnjenje (dokaz).

Rekonstruktivni pristup

Početkom 20. stoljeća njemački se matematičar **Felix Klein** (1924.) izrazito protivio praksi prezentiranja matematičkih tema kao dovršenog aksiomatskog deduktivnog sustava i umjesto toga zagovarao uporabu takozvanog *bio-genetičkog* principa u poučavanju. Genetički pristup zagovarao je i Wittmann (1973), **Polya** (1981), **Freudenthal** (1973) i mnogi drugi. U osnovi, genetički pristup tvrdi da učenik treba ili pratiti (barem djelomično) put koji slijede izvorni otkrivači ili izumitelji ili pratiti put kojim bi se matematički sadržaj mogao otkriti ili izumiti. Drugim riječima, učenici bi se trebali baviti tipičnim matematičkim procesima pomoću kojih se otkrivaju, stvaraju i organiziraju novi sadržaji u matematici. **Human** (1978, 20) ga naziva *rekonstrukcijskim* pristupom i suprotstavlja ga na sljedeći način s tzv. *izravnim aksiomatsko-deduktivnim* pristupom:

Ovim nazivom želimo naznačiti da se sadržaj ne predstavlja izravno učenicima (kao završeni proizvod matematičke aktivnosti), već da se sadržaj iznova rekonstruira tijekom nastave na tipičan matematički način.

Didaktička motivacija za rekonstruktivni pristup uključuje, među ostalim, sljedeća dva elementa: ističe *značenje* sadržaja i omogućuje učenicima *aktivno sudjelovanje* u izgradnji i razvoju sadržaja. U novije vrijeme konstruktivistička teorija učenja pruža psihološku perspektivu koja snažno podržava takav pristup poučavanju. Zbog različitih sadržaja (definicije, sustav aksioma, propozicije, dokazi, algoritmi itd.), naravno, mogu se razlikovati različiti matematički procesi za izgradnju tih sadržaja.

Genetički ili rekonstruktivni pristup ne prezentira sadržaj kao gotov, montažni proizvod, već se usredotočuje na izvorne matematičke procese pomoću kojih se taj sadržaj može razviti ili rekonstruirati. Imajte na umu, međutim, da rekonstruktivni pristup ne podrazumijeva nužno učenje otkrivanjem jer to može biti samo rekonstrukcijsko objašnjenje od strane učitelja ili iz udžbenika. To također ne znači da povijesni pristup treba strogo sli-

jediti, nego jednostavno znači da povijest matematike služi kao koristan vodič.

Definiranje

Unutarnja vrijednost matematike nije samo sadržana u rezultatima *matematičke aktivnosti (tj. dotjerani koncepti, definicije, strukture i aksiomatski sustavi), nego također i posebno u procesima* matematičke aktivnosti *koji dovode do takvih rezultata, npr. generalizacija, prepoznavanje uzorka, definiranje, aksiomatizacija. Nacrt nastavnih planova namjerava odražavati povećani naglasak na izvorne matematičke aktivnosti za razliku od puke asimilacije gotovih rezultata takve djelatnosti. Taj se naglasak posebno ogleda u raznim odjeljcima u geometriji.* (Matematičko udruženje Južne Afrike 1978, 3)

Većina učitelja i autora udžbenika tradicionalno učenicima jednostavno osiguravaju gotove sadržaje (definicije, teoreme, dokaze, klasifikacije itd.) koje se samo mora asimilirati i reproducirati u testovima i ispitima. Tradicionalno obrazovanje geometrije ove vrste može se usporediti s kuharskim tečajem gdje učitelj samo učenicima pokazuje kolače (ili, još gore, samo slike kolača) ne pokazujući im što ide u kolač i kako se pravi. Osim toga, ne smiju ni pokušati vlastitom rukom ispeči kolač!

Izravno učenje geometrijskih definicija bez naglašavanja temeljnih procesa definiranja, matematičari i matematički edukatori često jednako kritiziraju. Na primjer, već 1908. **Benchara Blandford** je napisao (citirano prema Griffiths i Howson 1974, 216-217):

Meni se to čini radikalno opakom metodom, naročito u geometriji, ako ne i u drugim predmetima, da se dijete opskrbi gotovim definicijama i da to naknadno zapamte, nakon što im je bilo manje-više pažljivo objašnjeno. Činiti tako sigurno znači namjeru odbacivanja jedne od najvrjednijih intelektualnih disciplina. Stimuliranje djetetovih vlastitih aktivnosti pri stvaranju definicja odgovarajućim potpitanjima istodobno je i zanimljivo i obrazovno. Pažljivo primjetimo njihove nedostatke te im pomognimo da preoblikuju te koncepate ...

Poznati matematičar **Hans Freudenthal** (1973, 416-418) također je oštro kritizirao tradicionalnu praksu izravnog davanja definicija u geometriji.

... sokratski didaktičar odbio bi predstaviti geometrijski objekt definicijom, ali gdje god prevladava didaktička inverzija, deduktivnost počinje s definicijama. (U tradicionalnoj geometriji čak se definira što je to definicija viša razina u procesu učenja.) Sokratski didaktičar odbacuje takav postupak. Kako možete definirati nešto prije nego znate što morate definirati? ... većina definicija nisu unaprijed stvorene, već dovršne kroz orga-

nizacijske aktivnosti. Dijete ne bi trebalo biti lišeno ove privilegije ... Dobro poučavanje geometrije može puno značiti: to je učenje organiziranja sadržaja i učenje što se organizira, učenje konceptualiziranja i onoga što jest konceptualizirano, to je učenje definiranja i što je definicija. Ovo znači voditi učenike da razumiju zašto je neka organizacija, neki koncept, neka definicija bolja od druge. Tradicionalna nastava je drugačija. Umjesto davanja djetetu mogućnosti organiziranja prostornih doživljaja, sadržaj se nudi kao unaprijed organizirana struktura. Sve pojmove, definicije i dedukcije unaprijed je pripremio učitelj, koji zna kako se koriste do u detalj ili bolje rečeno autor u udžbeniku u koji je pažljivo ugradio sve svoje tajne.

Samo poznavanje definicije pojma uopće ne jamči razumijevanje koncepta. Na primjer, iako su učenici možda bili poučeni i mogli su izreći standardnu definciju paralelograma kao četverokuta s paralelnim nasuprotnim stranicama, učenici možda još uvijek neće uzeti u obzir pravokutnike, kvadrate i rombove za paralelograme, budući da u učeničkoj slici koncepcepta paralelograma nije dopušteno da svi kutovi ili stranice budu jednaki. Čini se da bi se povećalo razumijevanje geometrijskih definicija, i koncepata na koje se odnose, važno je uključiti učenike u neku fazu procesa definiranja geometrijskih pojmova. Zbog složenosti procesa definiranja, čini se da je nerazumno očekivati da će učenici odmah sami doći do formalnih definicija, osim ako nisu didaktički vođeni, kroz neke primjere procesa definiranja, koje kasnije mogu koristiti kao modele za vlastite pokušaje.

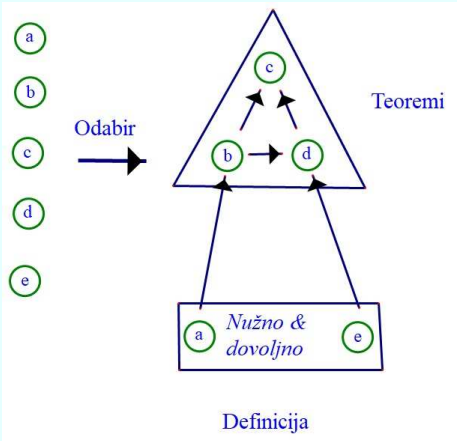
Nadalje, konstruiranje definicija je matematička aktivnost koja nije manje važna od ostalih matematičkih procesa kao što su rješavanje problema, stvaranje pretpostavki, generaliziranje, specijaliziranje, dokazivanje itd. i zato je čudno da je to zanemareno u nastavi matematike. U matematici možemo razlikovati dvije različite vrste definiranja pojmova: *opisno (a posteriori)* i *konstruktivno (a priori)* (na primjer, usporedi Krygowska 1971; Human 1978, de Villiers 1998 b).

Opisno definiranje

... opisna definicija ... ocrtava poznati objekt izdvajanjem nekoliko karakterističnih svojstava. (Freudenthal 1973, 458)

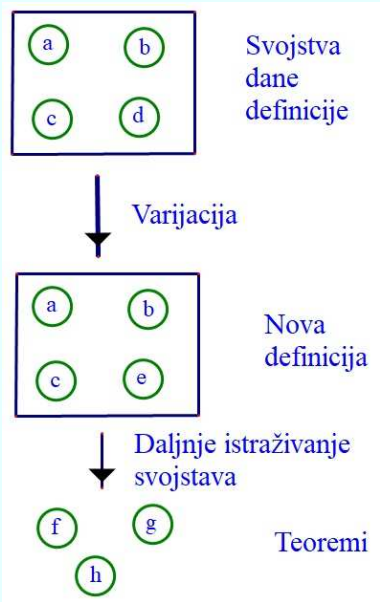
Opisno se definiranje događa nakon što su koncept i njegova svojstva već neko vrijeme poznati (v. sl.). Opisno se definiranje obično postiže odabirom odgovarajućeg podskupa ukupnog skupa svojstava koncepta iz kojega mogu biti izvedena sva druga svojstva. Taj podskup tada služi kao definicija, a druga preostala svojstva tada se logički izvode iz toga kao teoremi.

Logički nepovezana
svojstva
poznatog koncepta



Konstruktivno definiranje

. . . algoritamski konstruktivna i kreativna definicija . . . modelira nove predmete iz poznatih. (Freudenthal 1973., 458)



Konstruktivno definiranje vrši se promjenom zadane definicije isključivanjem, generalizacijom, specijalizacijom, zamjenom ili dodavanjem svojstava definiciji, tako da se u tom procesu konstruira novi koncept (v. sl.). Drugim riječima, definirano je *postojanje* novog pojma, a njegova daljnja

svojstva se tada mogu eksperimentalno ili logički istražiti. Dok je glavna svrha ili uloga opisnog definiranja *sistematizirati* postojeće znanje, glavna uloga konstruktivnog definiranja je stvaranje *novog znanja.*

Iz prethodne rasprave o van Hieleovoj teoriji, trebalo bi biti jasno da se razumjevanje formalnih definicija u udžbenicima, razvija samo na 3. razini i da je izravno pružanje takvih definicija učenicima na nižim razinama osuđeno na neuspjeh. Zapravo, ako uzmemo konstruktivističku teoriju učenja ozbiljno (znači da se znanje jednostavno ne može prenijeti izravno od jedne osobe drugoj osobi i da se smisao znanja učenik mora sam aktivno konstruirati) tada bismo trebali uključiti učenike u aktivnost definiranja i dopustiti im da sami odaberu svoje definicije na svakoj razini. Na primjer, za definiranje pravokutnika to znači dopuštanje sljedećih vrsta smislenih definicija za svaku van Hieleovu razinu:

van Hieleova 1. razina

Vizualna definicija, na primjer: pravokutnik je lik koji izgleda ovako (crta ili identificira četverokut sa svim kutovima od 90° te dvije dulje i dvije kraće stranice).

van Hieleova 2. razina

Neekonomična definicija, na primjer: Pravokutnik je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina, svi kutovi od 90°, dijagonale su jednakih duljina, ima centralnu simetriju, dvije osi simetrije kroz nasuprotne stranice, dvije dulje i dvije kraće stranice itd.

van Hieleova 3. razina

Točna, ekonomična definicija, na primjer: Pravokutnik je četverokut s dvije osi simetrije, kroz nasuprotne stranice.

Hijerarhijske nasuprot particijskim definicijama

Kao što možete vidjeti iz dva gornja primjera van Hieleove 1. i 2. razine, spontane definicije učenika također imaju tendenciju da budu *particijske.* Drugim riječima, ne dopuštaju uključivanje kvadrata među pravokutnike (izričito navodeći da postoje dvije dulje i dvije kraće stranice). Nasuprot tome, prema van Hieleovoj teoriji, definicije na 3. razini obično su hijerarhijske, što znači da dopuštaju uključivanje kvadrata među pravokutnike i ne mogu je razumjeti učenici na nižim razinama.

Formalnim definicijama u udžbenicima često prethodi oznaka o aktivnosti kojom učenici moraju usporediti različita svojstva četverokuta, na

primjer, vidjeti da kvadrat, pravokutnik i romb imaju sva svojstva paralelograma. Jasno je da je cilj pripremiti ih za kasnije formalne definicije koje su hijerarhijske. (Drugim riječima, dane definicije osiguravaju uključivanje posebnih slučajeva. Primjerice, paralelogram je definiran tako da uključuje kvadrate, rombove i pravokutnike.) Međutim, istraživanja su pokazala (de Villiers (1994)) da mnogi učenici, čak i nakon usporedbi i drugih aktivnosti, ako dobiju priliku, ipak radije definiraju četverokute particijski. (Drugim riječima, oni bi, na primjer, ipak radije definirali paralelogram kao četverokut s dva para nasuprotnih paralelnih stranica, ali ne i tako da su svi kutovi ili sve stranice jednake.)

Iz tog razloga, učenike ne bismo trebali samo opskrbiti s gotovim definicijama za četverokute, već bismo trebali dopustiti da formuliraju vlastite definicije neovisno o tome jesu li particijske ili hijerarhijske. Raspravljajući i uspoređujući u razredu prednosti i nedostatke ova dva različita načina klasificiranja i definiranja četverokuta (oba su matematički ispravna), učenici se vode prema shvaćanju da postoji određena prednost u prihvaćanju hijerarhijskog klasificiranja. Na primjer, ako se od učenika traži usporedba sljedeće dvije definicije paralelograma, oni bi mogli shvatiti da je prva ekonomičnija od druge:

Hijerarhijski:

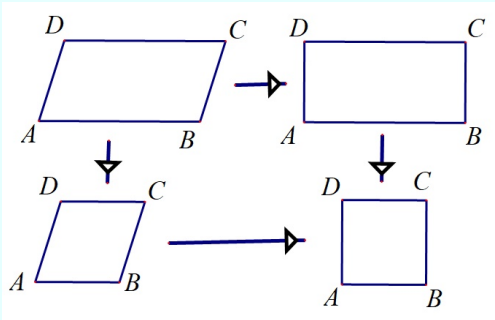
`Paralelogram je četverokut kojemu su oba para nasuprotnih stranica paralelna.`

Particijski:

`Paralelogram je četverokut kojemu su oba para nasuprotnih stranica paralelna, ali nisu svi kutovi ili sve stranice jednake veličine.`

Jasno je, općenito, da su particijske definicije dulje budući moraju uključiti dodatna svojstva kako bi se osiguralo isključenje posebnih slučajeva. Hijerarhijska definicija ima koncepcijsku prednost u tome što se svi teoremi dokazani za taj koncept automatski primjenjuju na njegove posebne slučajeve. Na primjer, ako dokažemo da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju, možemo odmah zaključiti da to vrijedi i za pravokutnike, rombove i kvadrate. Ako smo ih pak klasificirali i definirali particijski, morali bismo posebno dokazivati svaki slučaj (za paralelograme, pravokutnike, rombove i kvadrate), da se njihove dijagonale međusobno raspolavljaju. Jasno da je to vrlo neekonomično. Čini se jasnim će, osim ako se o hijerarhijskoj klasifikaciji smisleno ne raspravi na satu, kako je opisano u de Villiers (1994), mnogi učenici imati teškoća u razumijevanju zašto se njihove intuitivne, particijske definicije ne koriste.

S druge strane, dinamična priroda geometrijskih likova konstruiranih u Sketchpadu također može uvelike olakšati prihvaćanje hijerarhijske klasifikacije četverokuta. Na primjer, ako učenici konstruiraju četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne, onda će primijetiti da povlačenjem lika mogu na slici lako dobiti oblik pravokutnika, romba ili kvadrata. Zapravo, čini se sasvim mogućim da učenici mogu to prihvatiti i razumjeti čak i kod van Hieleove 1. razine (prepoznavanje), ali potrebno je provesti daljnja istraživanja o tome.



Dinamička transformacija paralelograma

Konstrukcija i mjerenje

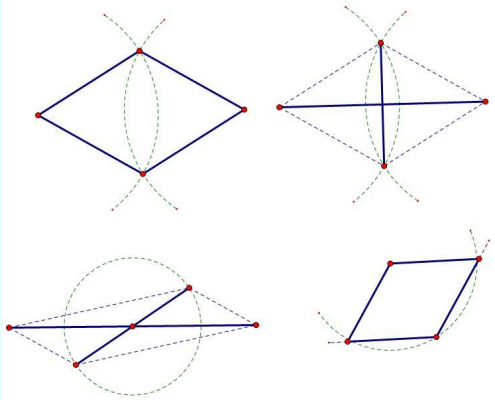
Najprije treba istaknuti da su određene vrste konstrukcijskih aktivnosti (Sketchpadom ili olovkom na papiru) neprikladne na van Hieleovoj 1. razini. Na primjer, netko je nedavno na znanstvenoj konferenciji izjavio da je neugodno iznenađen zbog teškoća koje su mala djeca imala sa zadatkom konstruiranja "dinamičkog" kvadrata pomoću Sketchpada. Međutim, ako su djeca još bila na van Hiele 1. razini, onda to uopće nije iznenađujuće. Kako ga mogu konstruirati ako ne znaju njegova svojstva (2. razina) te da su neka svojstva dovoljna, a druga nisu? (Ne znaju logične odnose između svojstava što je 3. razina.)

Zapravo, na van Hieleovoj 1. razini čini se da je daleko više primjereno pružiti djeci gotove sketcheve četverokuta u Sketchpadu, koje tada lako mogu manipulirati i vizualno istražiti. Dalje, mogu početi koristiti značajke mjerenja pomoću softvera za analizu svojstva (i naučiti odgovarajuću terminologiju) kako bi im se omogućilo da dosegnu 2. razinu. Tek tada bi ih bilo primjereno izazvati da sami konstruiraju takve dinamičke četverokute, pomažući im na taj način prijeći na 3. razinu.

Drugim riječima, od učenika koji su pretežno na van Hieleovoj 2.

razini još se ne može očekivati logička provjera vlastitih opisnih definicija četverokuta, već bi im trebalo omogućiti da to rade točnom konstrukcijom i mjerenjem. Na primjer, učenici bi mogli ocijeniti sljedeći pokušaj opisa (definicije) romba konstrukcijom i mjerenjem, kako je prikazano u nastavku:

1. Romb je četverokut sa svim stranicama jednakih duljina.
2. Romb je četverokut s okomitim dijagonalama koje se raspolavljaju.
3. Romb je četverokut s dijagonalama koje se međusobno raspolavljaju.
4. Romb je četverokut s jednim parom susjednih stranica jednakih duljina i oba para paralelnih nasuprotnih stranica.



Konstrukcija i mjerenje

U prvom primjeru učenici trebaju konstruirati četverokut tako da su sve četiri stranice jednakih duljina i tada mogu primijetiti da se dijagonale uvijek raspolavljaju i međusobno su okomite, neovisno o tome kako se pomiče lik. To jasno pokazuje da je svojstvo "okomite dijagonale koje raspolavlju" posljedica njihovog konstruiranja "sve su četiri stranice jednakih duljina". S druge strane, takvo testiranje jasno pokazuje kada je opis (definicija) nepotpun (ne sadrži dovoljno svojstava), kao u trećem primjeru.

Psihološki, ovakve su konstrukcije iznimno važne kao pomoć pri prijelazu s van Hieleove 2. razine na van Hieleovu 3. razinu. One pomažu razumijevanju razlike između *premise* i *zaključka* i njihovog uzročno - posljedičnog odnosa, tj. drugim riječima, razumijevanju logičke strukture tvrdnje oblika *ako-onda*. Na primjer, 4. tvrdnju učenici bi mogli preoblikovati kao: "*Ako* četverokut ima par susjednih stranica jednakih duljina i oba para paralelnih nasuprotnih stranica, *onda* je to romb (odnosno ima sve stranice jednakih duljina, okomite dijagonale koje se raspolavljaju itd.)". Smith (1940)

je izvijestio o značajnom poboljšanju razumijevanja učenika tvrdnje oblika *ako-onda* nakon što su im dopustili da naprave konstrukcije za procjenu geometrijskih tvrdnji na sljedeći način:

Učenici su to vidjeli kada su radili određene stvari praveći lik, rezultirale su neke druge stvari. Oni su naučili osjećati razliku u kategoriji između veza koje **stavljaju** *u lik - stvari koje imaju pod kontrolom - i veza koje su* **rezultat** *bez ikakvog djelovanja s njihove strane. Konačna razlika u ove dvije kategorije bila je povezana s razlikom između* **danih** *uvjeta i* **zaključka**, *između ako-dijela i onda-dijela rečenice.*

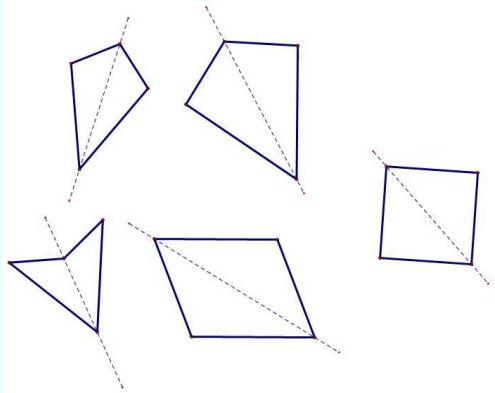
Etape u poučavanju geometrije

Prema van Hieleovoj teoriji, za smisleno učenje, učenici bi se trebali naučiti kako istraživati geometrijske sadržaje u etapama koje odgovaraju van Hieleovim razinama. Ozbiljan nedostatak van Hieleove teorije je, međutim, nepostojanje eksplicitne razlike između različitih mogućih uloga dokaza. Na primjer, razvoj deduktivnog mišljenja pojavljuje se prvo u kontekstu *sistematizacije* kod van Hieleove 3. razine. Naime, empirijska istraživanja de Villiersa (1991) i Mudaly (1998) ukazuju na uloge dokaza, poput *objašnjenja, otkrića* i *provjere* koja mogu biti smislena za učenike izvan konteksta sistematizacije. Drugim riječima, mogu imati smisla na van Hieleovoj razini nižoj od van Hieleove 3. razine, pod uvjetom da su argumenti intuitivne ili vizualne prirode, na primjer upotreba simetrije i disekcije. Iskustva ukazuju da produljeno zadržavanje na van Hieleovim 1. i 2. razinama, prije uvođenje dokaza, čini uvođenje dokaza kao smislene aktivnosti još težim. Sljedeća četiri primjera aktivnosti poredani su ne samo prema odgovarajućim van Hieleovim razinama, nego i prema razlikama između nekih različitih uloga dokaza na ovim razinama.

Aktivnost 1: Istraživanje svojstava deltoida

U ovoj aktivnosti učenici koriste Sketchpad za prvu konstrukciju deltoida pomoću osne simetrije, a zatim istražuju njegova svojstva (na primjer, kutove, stranice, dijagonale, kružnice). Pomicanjem učenici istražuju i posebne slučajeve (romb, kvadrat). Ova aktivnost

- uključuje van Hieleovu 1. razinu (prepoznavanje) i van Hieleovu 2. razinu (analiza i formulacija svojstva).
- traži od učenika da *objasne* (dokažu) svojstva deltoida pojmovima osne simetrije.



Konstruiranje

1. Nacrtajte pravac kroz dvije točke. Nacrtajte točku koja ne pripada pravcu.
2. Točki (koja je "izvan" pravca) konstruirajte osnosimetričnu sliku s obzirom na pravac.
3. Spojite odgovarajuće točke kako biste dobili četverokut kao što je prikazano na slici iznad.

Istraživanje

1. Za gore prikazane likove postavite pretpostavke o svojstvima sljedećih elemenata:

   a) stranicama, b) kutevima

   c) dijagonalama, d) upisanoj ili opisanoj kružnici

2. Može li konstruirani lik ponekad biti paralelogram, pravokutnik, romb ili kvadrat?
3. Logički objasnite svoja naslućivanja u prvom pitanju pomoću pojma simetrije.

Aktivnost 2: Konstruiranje polovišta stranica deltoida

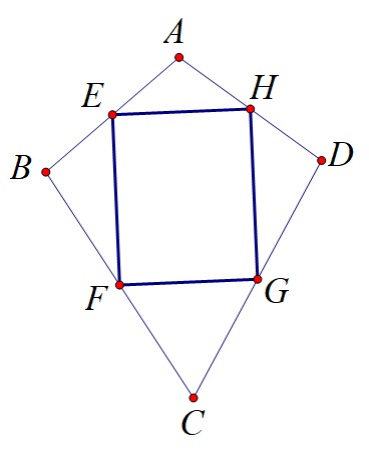
Učenici konstruiraju polovišta stranica dinamičnog deltoida i istražuju vrste likova (koje vode do pretpostavke da se radi o pravokutniku).

Ova aktivnost:

- objašnjava da polovišta tvore pravokutnik u smislu okomitosti dijagonala, što dovodi do *otkrića* da bi to vrijedilo za svaki četverokut s okomitim dijagonalama.

Konstruiranje

Konstruirajte i spojite polovišta stranica deltoida.



Istraživanje

1. Istražite četverokut kojeg određuju polovišta stranica deltoida.
2. Logički objasnite svoje naslućivanje.
3. Možete li pronaći ili konstruirati drugi općenitiji tip četverokuta koji će imati ista svojstva kao u 2. pitanju? (Rezultat se generalizira na svaki četverokut s okomitim dijagonalama.)

Aktivnost 3: Opisivanje deltoida

Učenici odabiru različite podskupove svojstava deltoida kao moguće opise (definicije) i najprije provjeravaju jesu li ta svojstva nužna i dovoljna koristeći ih pri konstruiranju Sketchpadom, a zatim provjeru vrše logičkim zaključivanjem (dokazom).

Ova aktivnost

- Uključuje van Hieleovu 3. razinu (lokalno uređivanje),
- Eksplicira ulogu dokaza kao sistematizacije (odnosno deduktivnu organizaciju svojstava deltoida),
- Uključuje matematički proces *opisnog* definiranja.

  Deltoid ima sljedeća svojstva:

  a) (Najmanje) jedna os simetrije kroz par nasuprotnih kutova.
  b) Okomite dijagonale (s najmanje jednom koja raspolavlja drugu).

c) (Najmanje) jedan par nasuprotnih kutova jednakih veličina.

d) Dva (različita) para susjednih stranica jednakih duljina.

e) (Najmanje) jedna dijagonala raspolavlja par nasuprotnih kutova.

f) Može mu se upisati kružnica.

Istraživanje

1. Kako biste, nekome tko ih ne poznaje, telefonski objasnili što su to deltoidi? (Pokušajte tako da vaš opis bude što kraći, ali osigurajte da osoba ima dovoljno podataka da ispravno nacrta četverokut.)

2. Pokušajte formulirati dva alternativna opisa. Koji vam se najviše sviđa? Zašto?

Aktivnost 4: Generaliziranje ili specijaliziranje deltoida

Učenici generaliziraju izostavljajući neka svojstva te specijaliziraju deltoid dodavanjem još svojstava. Svojstva novih objekata, koja su definirana, zatim istražuju konstrukcijom pomoću Sketchpada i/ili deduktivnim zaključivanjem.

Ova aktivnost

- Uključuje van Hieleovu 4. razinu (globalno uređivanje),
- Uključuje matematički proces konstruktivnog definiranja.

Istraživanje

1. Generalizirajte pojam deltoida na različite načine tako da izostavljate, mijenjate ili generalizirate neka njegova svojstva. (Jedna je mogućnost generalizirati ga na $2n$-terokut. Na primjer, to je mnogokut s najmanje jednom osi simetrije kroz par nasuprotnih kutova. Druga mogućnost generaliziracije je da je to četverokut s najmanje jednim parom susjednih stranica jednakih duljina, zatim s jednom dijagonalom koja raspolavlja drugu ili s upisanom kružnicom).

2. Specijalizirajte pojam deltoida na više načina dodavanjem više svojstava. (Mogućnosti za razmatranje je deltoid upisan u kružnicu, deltoid s najmanje tri jednaka kuta ili deltoid s drugom osi simetrije kroz par nasuprotnih kutova - romb).

Ove kratko opisane aktivnosti namijenjene su kao primjeri o tome kako se učenici mogu uključiti u dokazivanje na nižim razinama od van Hieleove

3. razine. Potpuno razvijene aktivnosti u ovoj knjizi po strukturi nalikuju na ove četiri aktivnosti, a imaju namjeru angažirati učenike na raznim van Hieleovim razinama. Nadam se da pokazuju da van Hieleova teorija ne zahtjeva od nas izbjegavanje dokaza, nego zahtjeva od nas da uključimo učenike u različite uloge dokaza.

2. Dokaz kao objašnjenje

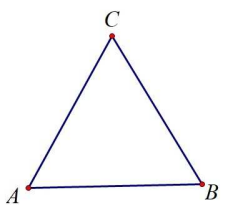
Michael de Villiers i Scott Steketee u Hrvatskoj

Udaljenost u jednakostraničnom trokutu

Preživjeli je brodolomac uspio otplivati do pustog otoka. Otok je oblika jednakostraničnog trokuta. Ubrzo otkriva da je surfanje izvrsno ako surfa na bilo kojoj od tri obale otoka. Izrađuje dasku za surfanje s oborenog drveta i surfa svaki dan.

Gdje treba sagraditi svoju kuću kako bi zbroj udaljenosti od njegove kuće do sve tri plaže bio što manji? (Jednaku pozornost posvetite svakoj plaži.)

Prije nego nastavite, odredite točku u trokutu na mjestu na kojem mislite da bi se trebala sagraditi njegova kuća.



NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Udaljenosti.gsp`. Pomaknite točku P kako biste eksperimentirali sa svojim sketchom/datotekom.

1. Pritisnite gumb za prikaz zbroja udaljenosti. Pomaknite točku P u unutrašnjosti trokuta. Što primjećujete u zbroju udaljenosti?

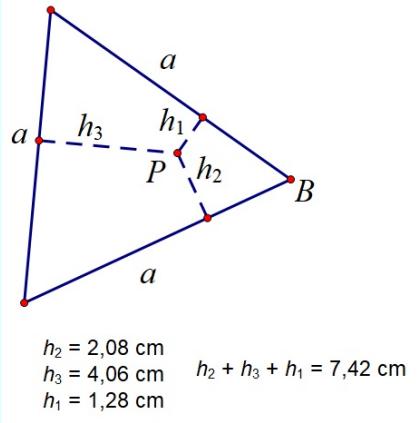
2. Pomaknite vrh trokuta da biste promijenili veličinu trokuta. Ponovno povucite točku P u unutrašnjosti trokuta. Što sada primjećujete?

3. Što se događa ako pomaknete P izvan trokuta?

4. Organizirajte svoja zapažanja prema pitanjima 1. – 3. Napišite svoju pretpostavku.

OBJAŠNJAVANJE

Nema sumnje da ste uvjereni da je ukupan zbroj udaljenosti od točke P do sve tri stranice jednakostraničnog trokuta uvijek stalan, sve dok je P unutarnja točka. No, možete li objasniti *zašto* je to istina?



Iako bi vas daljnje istraživanje u programu Sketchpad moglo još potpunije uvjeriti u istinitost vašeg naslućivanja, ono bi samo potvrdilo istinitost naslućivanja bez pružanja objašnjenja. Na primjer, zapažanje da Sunce izlazi svako jutro ne objašnjava zašto je to istina. Moramo to pokušati objasniti u smislu nečeg drugog, na primjer, rotacijom Zemlje oko polarne osi.

Nedavno je matematičar **Mitchell Feigenbaum** izveo nekoliko eksperimentalnih otkrića u fraktalnoj geometriji pomoću računala, baš kao što ste pomoću Sketchpada otkrili svoju pretpostavku o točki unutar jednakostraničnog trokuta. Feigenbaumova otkrića kasnije su objasnili **Oscar Lanford** i drugi. Evo što je drugi matematičar imao reći o svemu tome:

Lanford i drugi matematičari nisu pokušavali potvrditi Feigenbaumove rezultate ništa više nego, recimo, Newton koji je pokušavao potvrditi Keplerova otkrića o planetarnim orbitama. U oba slučaja valjanost rezultata nikada nije bila dovedena u pitanje. Nedostajalo je objašnjenje. Zašto su orbite bile elipse? Zašto su zadovoljile te posebne odnose? . . . postoji razlika između potvrđivanja i objašnjavanja.

- M. D. Gale, 1990. godine

IZAZOV

Uporabite drugi list papira kako biste pokušali logično objasniti svoje naslućivanje prema 4. pitanju. Nakon što ste neko vrijeme razmislili i napravili neku bilješku, koristite korake i pitanja koja slijede kako biste razvili objašnjenje vaših naslućivanja.

Pritisnite gumb Show small triangles za prikaz malih trokuta na skici/sketchu.

5. Pomaknite vrh izvornog trokuta. Zašto su tri različite stranice sve označene s oznakom a?

6. Napišite izraz za površinu svakog malog trokuta pomoću a i varijabli h_1, h_2 i h_3.

7. Zbrojite izraze za površine triju područja i pojednostavnite izraz tako da ga faktorizirate.

8. Kako je zbroj u 7. pitanju povezan s ukupnom površinom jednakostraničnog trokuta? Napišite jednakost za prikaz ove relacije koristeći slovo A za površinu jednakostraničnog trokuta.

9. Pomoću svoje jednakosti iz 8. pitanja objasnite zašto je zbroj udaljenosti do svih triju stranica zadanog jednakostraničnog trokuta uvijek konstantan.

10. Pomaknite točku P do vrha trokuta. Kako je zbroj udaljenosti povezan s visinom izvornog (početnog) trokuta u ovom slučaju?

11. Vaša objašnjenja u pitanjima 5., 8. i 9. ne bi bila istinita da trokut nije jednakostraničan. Zašto ne?

Iznesite svoje objašnjenje

Rezimirajte objašnjenje vašeg izvornog naslućivanja. Pomognite si odgovorima na pitanja 5. - 11. Objašnjenje možete prezentirati sa Sketchpadovom datotekom.

Daljnje istraživanje

1. Konstruirajte bilo koji trokut $\triangle ABC$ i proizvoljnu točku P unutar njega. Odredite položaj točke P tako da zbroj udaljenosti do sve tri stranice trokuta bude minimalan.

2. a. Konstruirajte bilo koji romb i proizvoljnu točku P unutar njega. Odredite položaj točke P tako da zbroj udaljenosti do sve četiri stranice romba bude minimalan.

   b. Objasnite svoje zapažanje u 2.a pitanju i generalizirajte ga na poligone sa sličnim svojstvom.

3. a. Konstruirajte bilo koji paralelogram i proizvoljnu točku P unutar njega. Gdje se nalazi točka P ako je zbroj udaljenosti od sve četiri stranice paralelograma minimalan?

Povijesna bilješka: Rezultat da je zbroj udaljenosti između točke i stranica jednakostraničnog trokuta konstantan poznat je kao Vivianijev teorem. **Viviani** je bio student talijanskog matematičara i znanstvenika **Evangelista Torricellija** (vidi i aktivnost Problem zračne luke).

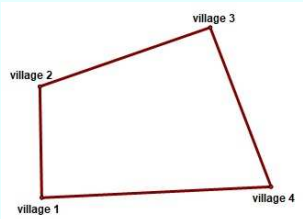
b. Objasnite svoje zapažanje u 3.a pitanju i generalizirajte ga za poligone sa sličnim svojstvom.

4. Konstruirajte (nepravilan) peterokut sa svim kutovima jednakih veličina i s proizvoljnom točkom P unutar njega. Što primjećujete na udaljenostima do stranica peterokuta? Možete li dalje generalizirati?

5. Dinamički Sketchpadov crtež kao što je na primjer crtež jednakostraničnog trokuta primjer je *matematičkog modela* koji se može koristiti za predstavljanje i analiziranje situacije u stvarnom svijetu. Međutim, situacije u stvarnom svijetu iznimno su složene i obično ih se prije mora pojednostavniti da se na njih može smisleno primijeniti matematika. Koje su neke od pretpostavki kojima bi se moglo pojednostaviti izvorni problem za jednakostranični trokut?

Opskrba vodom I.: Četiri grada

U zemljama u razvoju, poput Južne Afrike, postoji mnogo udaljenih ruralnih područja u kojima ljudi nemaju pristup sigurnoj, čistoj vodi te oni ovise o vodoopskrbi na obližnjim rijekama i potocima. Osim što su zbog čestih suša nepouzdane, te rijeke i potoci su često blatnjavi i neprikladni za prehranu ljudi. Pretpostavimo da vlada želi izgraditi spremnik za vodu i postrojenje za pročišćavanje za četiri sela u udaljenom ruralnom području. Gdje bi vlada trebala postaviti spremnik za vodu tako da bude na istoj udaljenosti od sva četiri sela?



ISTRAŽIVANJE

1. Prije nego počnete raditi sa Sketchpadom, nacrtatajte točku na crtežu koja pokazuje vašu najbolju pretpostavku za mjesto spremnika. Označite točku P.

   Otvorite datoteku `Opskrba vodom I.gsp` koja prikazuje kartu za crtanje.

   Konstruirajte bilo gdje točku P koja predstavlja položaj spremnika vode.

   Izmjerite udaljenosti od točke P do svakog od četiri vrha.

   Pomaknite točku P i promatrajte četiri mjerenja udaljenosti. Pokušajte otkriti položaj točke P tako da bude na jednakoj udaljenosti od sva četiri vrha.

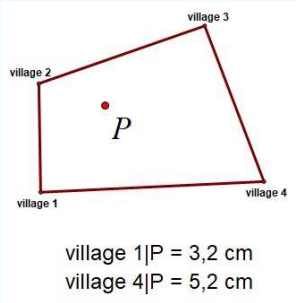
Za mjerenje udaljenosti između dviju točaka, odaberite obje točke i odaberite **Udaljenost** u izborniku Mjerenje.

2. Jeste li uspjeli postaviti točku P tako da su četiri udaljenosti jednake? Ako je tako, usporedite mjesto koje ste pronašli u Sketchpadovoj skici s vašim naslućivanjem u prvom pitanju? Što ste otkrili pokušavajući ih usporediti?

Jednostavniji problem

Možda će vam pomoći da ostvarite dva dodatna mjerenja ostavljajući samo mjerenja povezana s dva vrha na koja ste se odlučili.

Kako možete točno odrediti položaj točke P bez metode pokušaja i pogrješaka i bez pomicanja točke? Pri rješavanju problema često je korisno pogledati *jednostavniji slučaj* problema. U izvornom problemu željeli smo pronaći točku koja je jednako udaljena (na jednakim udaljenostima) od četiri vrha. Jednostavniji slučaj bi bio tražiti točku (ili točke) jednako udaljenu od samo dva vrha.



Nastavite rad u istom sketchu, ali se za sada usredotočite samo na dva susjedna vrha.

Ako je potrebno, pomaknite točku P tako da bude jednako udaljena od dva susjedna vrha.

Odaberite točku P i odaberite **Trag točke** iz izbornika Zaslon.

Polako pomaknite točku P nekoliko centimetara, držeći je što bliže jednakoj udaljenosti od dva susjedna vrha.

3. Opišite što više svojstava koja povezuju dobiveni trasirani put i dužinu koja spaja dva promatrana vrha.

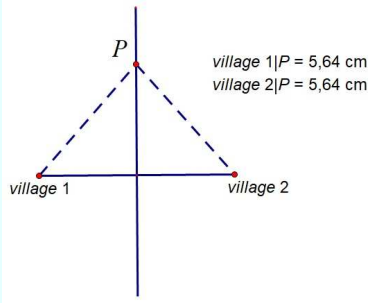
IZAZOV

Uporabite svoja zapažanja iz 3. pitanja da biste ponovno pogledali izvorni problem za sva četiri sela. Osmislite alternativni način pretraživanja točke jednako udaljene od sva četiri vrha. Opišite svoju konstrukcijsku metodu. Ako niste uspjeli, nastavite čitati.

Na prethodnom dijelu trebali ste zaključiti da postoji beskonačan broj točaka koje su jednako udaljene od dva vrha i da one sve pripadaju jednom pravcu. Nadalje, zbog simetrije možete primijetiti da ovaj pravac, koji pokazuje jednako udaljene točke, preslikava jedno selo na drugo; stoga ovaj pravac dijeli na pola dužinu koja povezuje sela i okomit je na nju. Ovaj pravac jednako udaljenih točaka naziva se *simetralom*

dužine.

Za konstrukciju simetrale dužine u Sketchpadu, prvo odaberite dužinu i odaberite **Polovište** iz **Konstrukcije** |**Polovište** te naredbu **Okomica**.



Ako su se vaša sela preselila tijekom vaše konstrukcije, pomoću gumba ih vratite na početna mjesta.

Konstruirajte simetrale svih stranica četverokuta.

4. Što primjećujete o četirima simetralama ovoga četverokuta?

Općenitiji problem

5. Mislite li da uvijek možete pronaći točku jednako udaljenu od četiri vrha četverokuta, bez obzira na oblik ili veličinu četverokuta? Objasnite.

6. Pomaknite bilo koji vrh četverokuta. Što sada primjećujete o simetralama njegovih stranica?

7. Slažete li se i dalje s odgovorom na 5. pitanje? Objasnite.

   Pomoću gumba na skici vratite sela na njihova točna mjesta.

   Pomaknite točku P do točke koja je jednako udaljena od sva četiri vrha.

   Konstruirajte kružnicu sa središtem P i naseljima na kružnici.

8. Zapišite ono što opažate o ostalim vrhovima četverokuta i objasnite zašto to mora biti istina.

Daljnje istraživanje

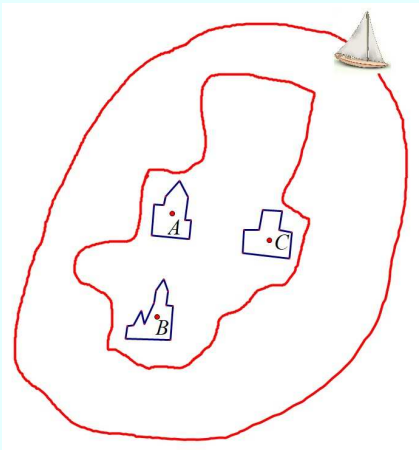
1. U novom sketchu konstruirajte četverokut i točku unutar njega tako da je jednako udaljena od sva četiri vrha. Nacrtajte bilo koji četverokut. Uvjerite se da je točka unutar njega uvijek jednako udaljena od vrhova,

bez obzira na to koje točke povlačite. Objasnite svoj način konstruiranja.

2. Naš primjer je dinamički crtež matematičkog modela četiri sela u Sketchpadu koji se može koristiti za predstavljanje i analizu situacije u stvarnom svijetu. Međutim, situacije u stvarnom svijetu iznimno su složene i obično se moraju pojednostavniti prije nego što se matematika može smisleno primjeniti na njih. Koje su neke od pretpostavki kojima bi se mogao pojednostavniti izvorni problem?

3. Pretpostavimo da ne postoji jednako udaljena točka za četiri sela (tj. simetrale nisu konkurentne). Istražite koji bi mogao biti "najbolji" položaj za postavljanje spremnika za vodu. Možete li matematički objasniti zašto mislite da bi to bio "najbolji" položaj?

4. Pretpostavimo da plovite brodom oko otoka kako je naznačeno na slici. Na kojim biste mjestima na ruti mogli odrediti koja je od zgrada A, B ili C najdalja, a koja najbliža brodu? Objasnite svoje zaključivanje. (Sve zgrade stoje na istoj razini i vidljive su iz bilo koje točke koja je na naznačenoj ruti.

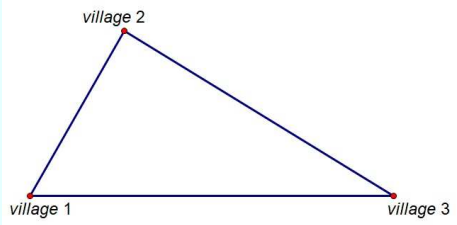


Opskrba vodom II.: Tri grada

Vlada mora izgraditi spremnik za vodu za tri sela (v. sl.). Gdje treba postaviti spremnik vode tako da se nalazi jednako udaljen od sva tri sela?

ISTRAŽIVANJE

Za konstrukciju simetrale dužine u Sketchpadu, prvo odaberite dužinu i odaberite **Polovište** iz **Konstrukcije** |**Polovište** te **Okomica**.



1. Prije nego počnete crtati/rješavati Sketchpadom, nacrtajte točku unutar trojuta na crtežu koja prikazuje vašu najbolju pretpostavku za lokaciju spremnika. Označite je kao točku P.

   Otvorite datoteku `Opskrba vodom II.gsp`, koja prikazuje kartu na crtežu.

   Konstruirajte simetrale dviju stranica trokuta kakobiste odredili točan položaj sprmnika na sketchu.

2. Usporedite položaj spremnika i položaj točke P. Kakva je vaša lokacija spremnika u usporedbi s vašom početnom pretpostavkom lokacije?

Općenitiji problem

3. Mislite li da uvijek možete pronaći točku jednako udaljenu od sva tri vrha, bez obzira na oblik ili veličinu trokuta? Objasnite.

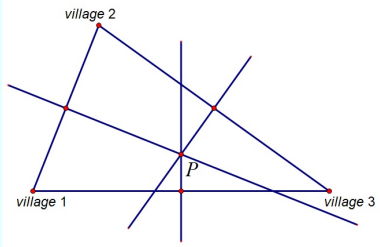
4. Pomaknite bilo koji vrh trokuta. Što primjećujete o simetralama stranica? Slažete li se i dalje sa svojim odgovorom u 3. pitanju? Objasnite.

OBJAŠNJAVANJE

U aktivnosti **Opskrba vodom I.: Četiri grada** otkrili ste da se simetrale stranica četverokuta ne sijeku uvijek u jednoj točki. Drugim riječima, simetrale stranica četverokuta nisu uvijek konkurentne. Međutim, u toj ste aktivnosti trebali otkriti da su simetrale stranica bilo kojeg trokuta uvijek konkurentne u točki jednako udaljenoj od sva tri vrha. Ova točka konkurentnosti naziva se *središte trokutu*

opisane kružnice budući da je to središte kružnice (*opisane kružnice*) koja sadrži sva tri vrha trokuta.

Ako ste došli do vlastitog objašnjenja zašto su simetrale stranica bilo kojeg trokuta konkurentne, usporedite ga s onim koji slijedi. Ako ne, provedite iduće istraživanje:



Neka je točka P presjek dviju simetrala stranica. Logički ćemo pokazati da točka P mora biti i na simetrali treće stranice trokuta, odnosno da se sve tri simetrale stranica trokuta uvijek sijeku u jednoj točki.

5. Odaberite jednu od dvije simetrale. Što možete reći o svim točkama te simetrale?
6. Što možete reći o svim točkama druge simetrale?
7. Što dakle možete reći o točki P koja je sjecište dviju simetrala?
8. Što, dakle, možete zaključiti o točki P i simetrali treće stranice?

Prezentirajte svoje objašnjenje

Objedinite svoje objašnjenje koristeći odgovore na pitanja 5. - 8. Svoje objašnjenje možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

1. Kada je središte trokutu opisane kružnice unutar, izvana ili na kružnici?
2. Konstruirajte bilo koji četverokut $ABCD$ i bilo koje tri njegove simetrale stranica. Konstruirajte presjek dvije od tih simetrala i koristite ga kao središte za konstrukciju kružnice koja uvijek prolazi kroz tri vrha.
   a. Povucite vrhove četverokuta tako da su tri simetrale stranica konkurentne. Što primjećujete?

b. Povucite četverokut tako da su tri simetrale opet konkurentne. Također, konstruirajte četvrtu simetralu. Što primjećujete?

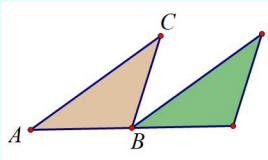
c. Napišite tvrdnje o svojim zapažanjima. Čime objašnjavate zašto je to istina? Možete li dalje generalizirati na peterokute, šesterokute i tako dalje? Razgovarajte sa svojim partnerom ili grupom.

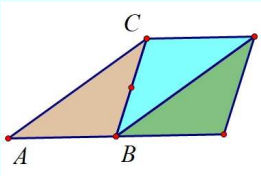
Zbroj kutova u trokutu

Ovo istraživanje ćemo započeti naslućivanjem o zbroju veličina kutova u trokutu. Zatim izradite sketch koji će vam pomoći objasniti zašto je vaša pretpostavka točna.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Zbroj u trokutu.gsp`





Translatirajte trokut pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ pritiskom na gumb. Povucite vrhove i promatrajte svoj sketch (slika lijevo).

Rotirajte $\triangle ABC$ za 180° oko polovišta $\overline{BC}$ pritiskom na gumb (slika desno).

1. Povucite vrh izvornog trokuta. Što možete reći o tri kuta koja se sada sastaju u točki C izvornog trokuta?
2. Uporabite svoju konstrukciju kako biste pretpostavili koliki je zbroj kutova trokuta. (To se često naziva pretpostavkom o zbroju kutova u trokutu.)

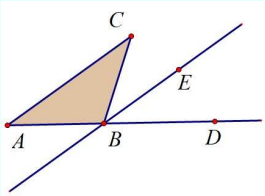
OBJAŠNJAVANJE

Vjerojatno ste sada prilično uvjereni, nakon prethodnog istraživanja, da je zbroj kutova trokuta uvijek jednak mjeri od 180°. Daljnje istraživanje na istoj skici vjerojatno će vas uspjeti još više uvjeriti. No, to doista ne daje obrazloženje nego se samo nastavlja potvrđivanje istinitosti ove izjave. Umjesto toga, sada ćemo pokušati objasniti vaše naslućivanje kao posljedicu druge geometrijske ideje.

Uobičajeno je u svakom objašnjenju navesti razloge za svaki korak.

Evo nekoliko savjeta za planiranje mogućeg objašnjenja na temelju zadnje skice koju ste nacrtali:

Za konstrukciju paralelnog pravca odaberite točku i dužinu i odaberite **Paralela** u izborniku Konstrukcije.



- Za skrivanje koristite odgovarajuće gumbe za dva nova trokuta tako da se samo prikazuje trokut $\triangle ABC$.
- Pritisnite gumb za prikaz zrake AB i točke D.
- Točkom B konstruirajte pravac paralelan s AC.
- Konstruirajte točku E, kako je prikazano na slici.
- Povucite točku A da biste promatrali ponašanje ove konstrukcije.

3. Opišite i objasnite kakav je odnos između kutova $\angle CAB$ i $\angle EBD$. Zašto?
4. Kakav je odnos između kutova $\angle ACB$ i $\angle CBE$? Zašto?
5. Što možete zaključiti o zbroju mjera kutova $\angle ABC$, $\angle CBE$ i $\angle EBD$? Zašto?
6. Koji zaključak proizlazi iz pitanja 3. - 5. o zbroju mjera kutova $\angle ABC$, $\angle ACB$ i $\angle CAB$?
7. Koja svojstva pravaca i paralelnih pravaca ste ovdje primjenili kako biste objasnili činjenicu da je zbroj mjera kutova trokuta 180°?

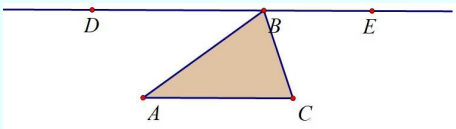
Prezentirajte svoje objašnjenje

Objedinite svoje objašnjenje koristeći odgovore na pitanja 3. - 7. Svoje objašnjenje možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

1. Konstrukcija na slici daje vam drugi način objašnjenja pretpostavke o zbroju kutova u trokutu.



Počnite s $\triangle ABC$. Konstruirajte točkom B pravac koji je paralelan s $\overline{AC}$. Konstruirajte točke D i E koje su na paralelnim pravcima s $\overline{BC}$ kroz A i s $\overline{AB}$ kroz C kako je prikazano na slici.

a. Za objašnjenje pretpostavke o zbroju kutova u trokutu uporabite svoju novu skicu i svojstva paralelnih pravaca.

b. Po čemu se ovo objašnjenje razlikuje od objašnjenja u pitanjima 3. - 7.?

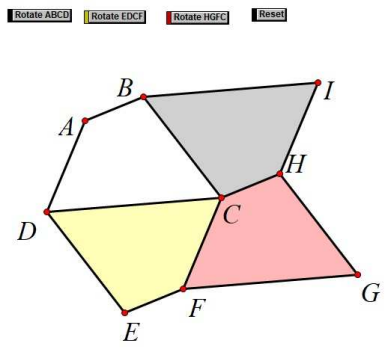
Zbroj kutova u četverokutu I.

U ovoj aktivnosti istražit ćemo popločavanje ravnine četverokutima. Otkrit ćete i objasniti zanimljivo svojstvo četverokuta.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Zbroj u četverokutu.gsp`. Pritisnite tipke za rotiranje svakog četverokuta.

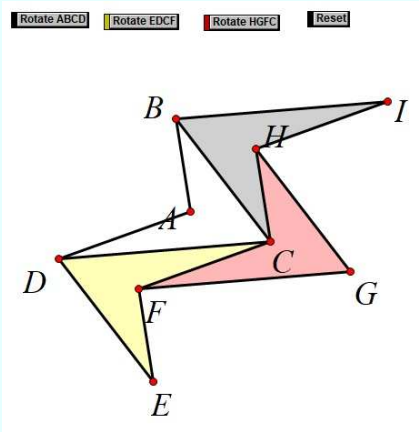
Resetirajte vašu skicu. Promijenite oblik četverokuta $ABCD$ i opet svaki četverokut rotirajte.



Za mjerenje kuta odaberite tri točke (pri čemu je vrh kuta slovo u sredini), a zatim u izborniku Mjerenje odaberite naradbu **Kut**.

1. Objasnite kako su četiri četverokuta povezana.
2. Pogledajte četiri kuta oko vrha C. Navedite postoje li preklapanja ili praznine između kutova. Odredite zbroj njihovih mjera.
3. Povucite bilo koji vrh četverokuta $ABCD$ da biste promijenili četverokut. Jesu li vaša zapažanja iz 2. pitanja još uvijek točna?
4. Pažljivo usporedite kutove oko vrha C s unutarnjim kutovima četverokuta $ABCD$. Izmjerite neke kutove, ako je potrebno.
   a. Što možete reći o kutovima $\angle ADC$ i $\angle FCD$? Zašto?
   b. Što možete reći o kutovima $\angle BAD$ i $\angle HCF$? Zašto?
   c. Što možete reći o kutovima $\angle CBA$ i $\angle BCH$? Zašto?
5. Konačno, što možete reći o zbroju unutarnjih kutova četverokuta $ABCD$?

6. Povucite vrh tako da četverokut $ABCD$ bude nekonveksan (konkavan). Je li vaše naslućivanje još uvijek točno?



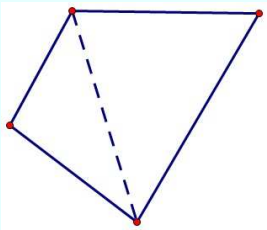
IZAZOV

Pokušajte logično objasniti svoje naslućivanje iz 5. pitanja napisavši argument temeljen na prethodnom istraživanju. Ako ne uspijete ili želite neki savjet, nastavite čitati.

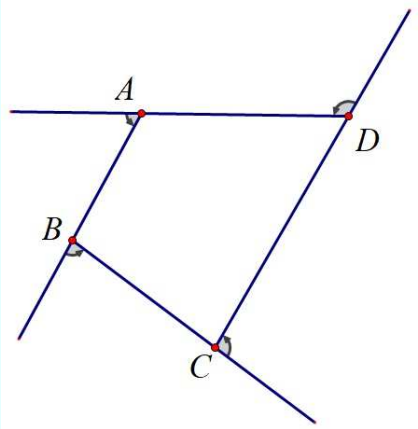
OBJAŠNJAVANJE

Postoji nekoliko različitih načina za stvaranje logičkih objašnjenja zašto je zbroj mjera unutarnjih kutova bilo kojeg konveksnog ili konkavnog četverokuta 360°. Pitanja 7. i 8. pokazuju dva moguća načina.

7. Resetirajte sketch. Konstruirajte dijagonalu koja dijeli četverokut na dva trokuta. Povucite četverokut kako bi bili sigurni da ova konstrukcija vrijedi i za konveksne i za konkavne slučajeve. Sada uporabite ono što znate o zbroju mjera kutova trokuta kako bi se objasnilo zašto zbroj mjera unutarnjih kutova bilo kojeg četverokuta iznosi 360°.



8. Podsjetimo da zbroj mjera vanjskih kutova poligona uvijek iznosi 360° (sve dok se stranice poligona međusobno ne presjecaju). Primjenite ovo svojstvo vanjskih kutova na određivanje zbroja mjera unutarnjih kutova četverokuta.



Prezentirajte svoje objašnjenje

Jasno napišite jedno ili oba svoja logička objašnjenja. Svoje objašnjenje možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

Istražite zbroj mjera unutarnjih kutova konveksnih ili konkavnih peterokuta, šesterokuta itd. Možete li izvesti opću formulu za zbroj mjera unutarnjih kutova bilo kojeg konveksnog ili konkavnog poligona?

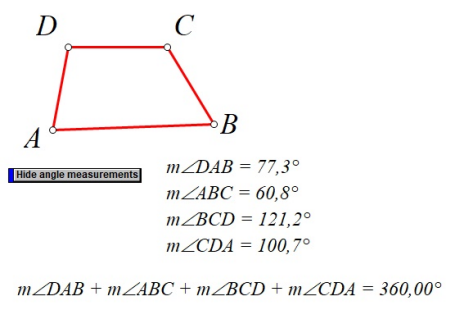
Zbroj kutova u četverokutu II.

Možda ste već uobličili pretpostavku o zbroju mjera kutova u konveksnom ili konkavnom četverokutu. Možda ste i objasnili zašto je pretpostavka istinita. Primjenjuje li se to naslućivanje na četverokute kojima sestranice međusobno sijeku? U ovoj aktivnosti istražit ćete to pitanje.

NASLUĆIVANJE

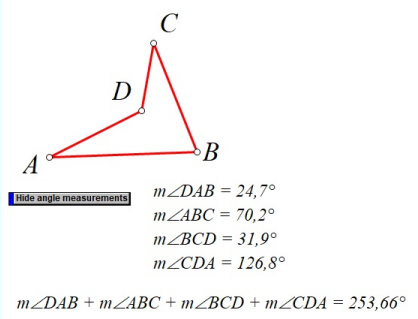
Otvorite datoteku `Zbroj u četverokutu II.gsp`. Ova datoteka prikazuje konveksni četverokut i njegove mjere kutova.

Povucite bilo koji vrh i promatrajte mjere kutova te njihov zbroj. Za sada razmotrimo konveksni četverokut.



1. Zapišite što zapažate o zbroju mjera unutarnjih kutova konveksnog četverokuta.

   Povucite vrh tako da je četverokut konkavan i promatrajte mjere kutova i njihov zbroj dok povlačite.

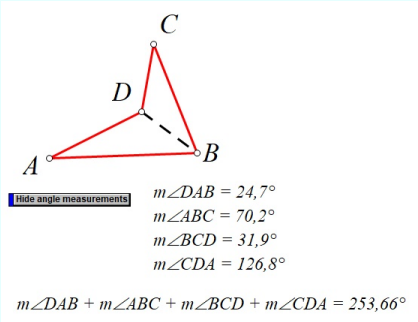


2. Što uočavate o zbroju mjera kutova konkavnog četverokuta? Je li to za vas očekivano? Zašto da ili zašto ne?

3. Na sketchu nacrtajte dijagonalu konkavnog četverokuta. Ako ste objasnili zašto je prepostavka zbroja kutova točna za konveksni četverokut, razmislite o tom objašnjenju. Na koji način ili načine vaša

skica sada proturječi mjerama i zbroju kutova u Sketchpadovom dokumentu?

Za izradu isprekidane dijagonale, odaberite je, a zatim u izborniku Zaslon odaberite **Stil crte Iscrtkana**.



Zbunjeni? Trebali bi biti! Ako razumijete objašnjenje zašto je zbroj mjera unutarnjih kutova četverokuta 360°, trebate vidjeti kako bi se to trebalo primjenjivati na konkavne kao i na konveksne četverokute. Ipak, Sketchpad ne prikazuje da je zbroj 360° u konkavnim četverokutima. Što se događa? Je li objašnjenje pogrješno? Je li Sketchpad manjkav? U sljedećim pitanjima i koracima, otkrit ćete što se događa i kako ispraviti taj problem.

4. Pogledajte sliku u 3. pitanju. Tri od četiri mjere unutarnjih kutova su točne, ali jedna od mjera nije mjera unutarnjeg kuta. To je zato što Sketchpad može mjeriti kutove kao kutove i kao usmjerene kutove. To se definira pomoću `Uređivanje|Postavke...|Jedinice|Kut|stupnjevi ili usmjereni stupnjevi`. Prepoznajte kut na slici čija je mjera veća od 180°, izračunajte njegovu mjeru i napišite je ispod. Ako koristite ovo onda ćete dobiti da je 360° zbroj unutarnjih kutova na slici. Kao što ste otkrili, Sketchpad može mjeriti kutove i usmjerene kutove. Sketchpad ipak mjeri kutove koji mogu biti veći od 180°. Mjerenje središnjeg kuta riješit će naš problem mjerenja bilo kojeg kuta.

Pritisnite gumb *Prikaži pripadne središnje kutove.*

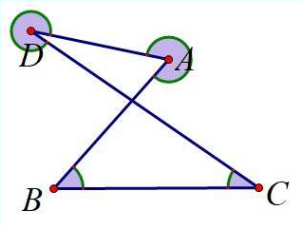
Povucite vrh četverokuta i promatrajte mjere pripadnih središnjih kutova i njihov zbroj.

5. Koje mjere su korisnije za istraživanje unutarnjih kutova općeg (konveksnog ili konkavnog) četverokuta - jednostavne kutne mjere ili mjere pripadnih središnjih kutova? Zašto?

Odaberite nacrtanu dijagonalu i izbrišite je.

6. Prije nego što povučete neki vrh, razmislite što će se dogoditi sa zbrojem mjera unutarnjih kutova ako se dvije stranice četverokuta $ABCD$

međusobno sijeku?

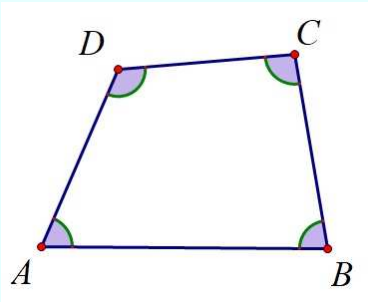


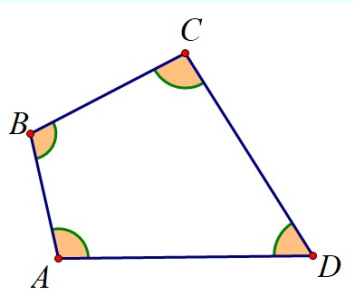
Sada povucite vrh svog četverokuta dok ne postane kao četverokut na slici. Promatrajte što se događa s lukovima i mjerama kutova dok povlačite vrh.

7. Trebali ste uočiti da su dva luka u četverokutima čije se stranice presjecaju uvijek lukovi izbočenih kutova. Ima li smisla te kutove nazvati "unutarnjim" kutovima? Zašto da ili zašto ne?

   "Da" i "ne" prihvatljivi su odgovori na 7. pitanje. Možete se objektivno usprotiviti da se nazovu "unutarnjim" kutovima jer izgleda da padaju izvan poligona. S druge strane, kada se dogodi presjecanje stranica u mnogokutu, tada više nije očito što je izvana, a što iznutra. Moguće je definirati unutarnje kutove ovog četverokuta na način koji je u skladu s četverokutima kojima se stranice ne presijecaju.

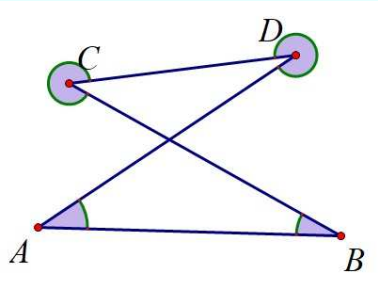
   Zamislite da hodate oko prvog četverokuta prikazanog dolje na crtežu, abecedno, od A do B do C i tako dalje. Unutrašnjost četverokuta je uvijek s vaše lijeve strane. Sada zamislite da šetate uokolo drugog četverokuta od A do B do C i tako dalje. Ovaj četverokut ima drugačiju orijentaciju, ali je još uvijek jasno gdje se nalazi unutarnjost: s vaše desne strane. Dakle, dok hodate naokolo, unutarnji kutovi četverokuta svi mogu biti s desne ili s lijeve strane.

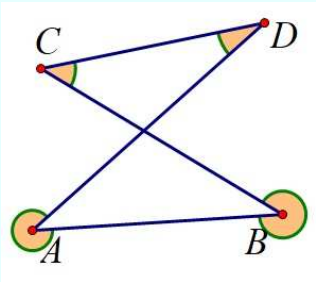




U četverokutu kojemu se stranice presijecaju, poput četverokuta na slici ispod, subjektivno je reći je li unutrašnjost s lijeva ili s desna, dok se šetate uokolo. Tako da u svrhu definiranja unutarnjih kutova ostanite pri onome što znate o četverokutima kojima se stranice ne

presjecaju: svi su kutovi s desna dok hodate uokolo ili su svi s lijeva. I u četverokutu u kojem se stranice presjecaju možete ih nazvati "unutarnjim" kutovima.

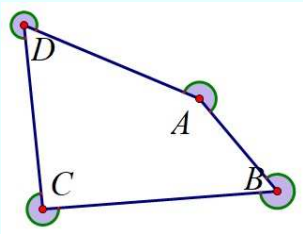




Povucite vrh kako biste promatrali različite četverokute kojima se stranice presjecaju.

8. Prema gore navedenoj definiciji unutarnjih kutova, odredite koliki je zbroj mjera unutarnjih kutova četverokuta kojemu se stranice presijecaju?

9. Možete vući sve dok ne prijeđete na drugi par stranica. (U određenom smislu okrećete četverokut iznutra prema van.) Opišite svoje rezultate. Što točno prikazuje zbroj unutarnjih kutova: jednostavne mjere kutova, mjere pripadnih središnjih kutova ili ništa od toga? Objasnite!



IZAZOV

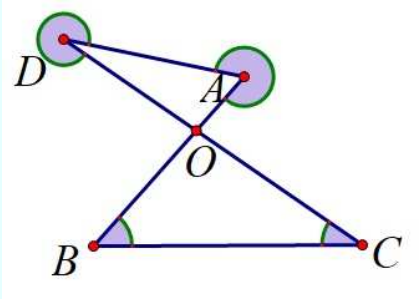
Objasnite svoja zapažanja u 8. pitanju. Možete li izvesti opću formulu za zbroj unutarnjih kutova bilo kojeg konveksnog, konkavnog ili poligona kojemu se stranice sijeku?

OBJAŠNJAVANJE

Logično objasnite zašto je zbroj mjera unutarnjih kutova četverokuta, kojemu se stranice presjecaju, jednak 720°.

10. Izrazite mjere izbočenih kutova $\angle ADC$ i $\angle BAD$, preko mjera šiljastih kutova $\angle ADC$ i $\angle BAD$.

11. Izrazite mjeru kuta $\angle BOD$ preko mjera šiljastih kutova $\angle ADC$ i $\angle BAD$. Objasnite svoj zapis.



12. Izrazite mjeru kuta $\angle BOD$ pomoću mjera kutova $\angle BCD$ i $\angle ABC$. Objasnite svoju tvrdnju.

13. Na temelju 11. i 12. pitanja, možete li zaključiti o odnosu između zbroja mjera šiljastih kutova $\angle ADC$ i $\angle BAD$ i o zbroju mjera kutova $\angle BCD$ i $\angle ABC$?

14. Na temelju 13. pitanja, možete li zaključiti o zbroju mjera izbočenih kutova $\angle ADC$ i $\angle BAD$ te šiljastih kutova $\angle BCD$ i $\angle ABC$?

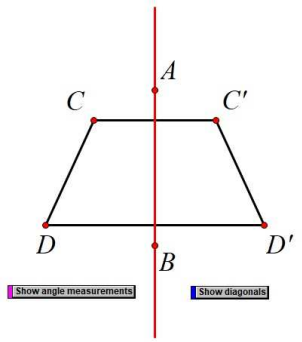
Prezentirajte svoje objašnjenje

Pripremite prezentaciju o svojem objašnjenju. Prezentacija može sadržavati Sketchpadovu datoteku/skicu i možete je pripremiti u paru ili grupi.

Jednakokračni trapez

U ovoj ćete aktivnosti konstruirati jednakokračni trapez. Otkrit ćete neka svojstva ovog posebnog četverokuta i objasniti zašto jednakokračan četverokut ima ova svojstva.

NASLUĆIVANJE



U novoj skici konstruirajte pravac AB.

Konstruirajte bilo koje dvije točke C i D koje nisu na pravcu AB, tako da budu s iste strane pravca AB.

Zrcalite točke C i D s obzirom na pravac AB (kao osi zrcaljenjanja).

Spojite točke C, D, C' i D u četveroku $CDD'C'$.

Izmjerite duljine svih stranica jednakokračnog trapeza.

1. Povucite bilo koju točku na skici. Što uočavate o stranicama jednakokračnog trapeza?

Izmjerite sva četiri kuta vašeg jednakokračnog trapeza.

2. Što opažate o kutovima jednakokračnog trapeza?

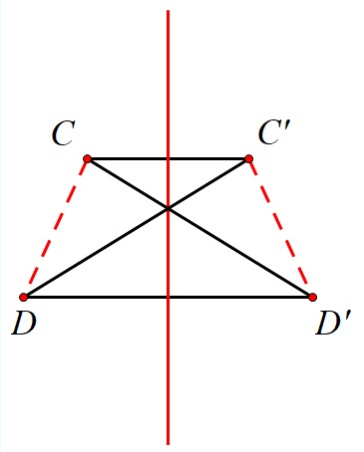
Konstruirajte dijagonale trapeza: $\overline{CD'}$ i $\overline{DC'}$.

Odaberite obje dijagonale i u izborniku Zaslon odaberite naredbu **Stil crte** i podnaredbu **Iscrtkana**.

Izmjerite duljine dijagonala.

3. Povucite bilo koju točku na skici. Što možete zaključiti o dijagonalama jednakokračnog trapeza?

4. *Ukršteni četverokut* ima dvije stranice koje se sijeku. Možda ste već primijetili da možete preokrenuti jednakokračni četverokut u ukršteni četverokut. Koja od, ako ih ima, vaših zapažanja iz 1. - 3. pitanja još uvijek vrijede za ukršteni jednakokračni trapez?



5. Što primjećujete u Sketchpadovim mjerenjima ukrštenog jednakokračnog trapeza koje ne vrijede uvijek za konveksni jednakokračni trapez?

OBJAŠNJAVANJE

Zatim ćete objasniti *zašto* su vaše pretpostavke istinite.

6. Prvo objasnite svoja naslućivanja u gornjim pitanjima 1. - 4. (*Savjet*: Razmislite o načinu na koji ste konstruirali jednakokračni trapez i njegovu os simetrije.)

7. Sada objasnite svoje naslućivanje iz 5. pitanja (*Savjet*: Pogledajte četiri trokuta određena s četiri stranice četverokuta. Sakrijte dijagonale ako vam smetaju.)

Daljnje istraživanje

1. Povucite jednakokračni trapez tako da su mu sva četiri kuta jednaka, ali da je i dalje konveksan. Je li to još uvijek jednakokračni trapez? Objasnite.

2. Pomicanjem vrhova četverokuta načinite da su sve četiri stranice jednakih duljina. Je li vaš četverokut i dalje jednakokračni trapez? Objasnite.

3. Možete li pomaknuti/transformirati jednakokračni trapez u sve moguće oblike paralelograma? Što kažete o deltoidu? Objasnite.

4. Možete li konstruirati kružnicu koja uvijek prolazi kroz sva četiri vrha vašeg jednakokračnog trapeza? (*Savjet*: Konstruirajte simetrale svih četiriju stranica vašeg jednakokračnog trapeza.) Objasnite svoju konstrukciju pomoću simetrije.

Tetivni četverokut

U ovoj ćete aktivnosti istražiti neka svojstva četverokuta upisanog u kružnicu. Drugim riječima, to je četverokut čiji vrhovi pripadaju kružnici. Takav se četverokut naziva *ciklički četverokut* ili *tetivni četverokut*.

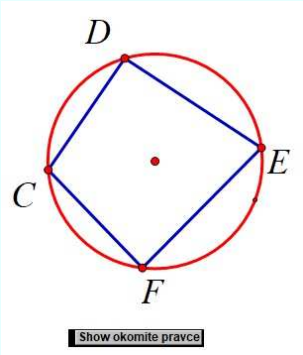
NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Tetivni četverokut.gsp`.

Pomoću Sketchpadovog kalkulatora zbrojite mjere svakog para nasuprotnih kutova.

1. Povucite vrh. Što možete reći o dva para nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta? (Možda ste povukli vrh tako da se stranice četverokuta međusobno presjecaju. Ne brinite se za sada zbog ovoga "ukrštenog četverokuta".)

2. Pritisnite gumb *Prikaži okomite pravce*. Što primjećujete kod simetrala stranica tetivnog četverokuta?

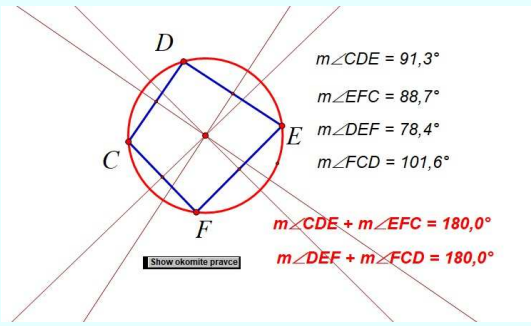


Daljnje istraživanje

Možete li svoj tetivni četverokut transformirati u oblike nekih posebnih četverokuta koje ste već vidjeli? Na primjer, pokušajte oblikovati deltoid, jednakokračni trapez, paralelogram, romb, pravokutnik ili kvadrat.

OBJAŠNJAVANJE

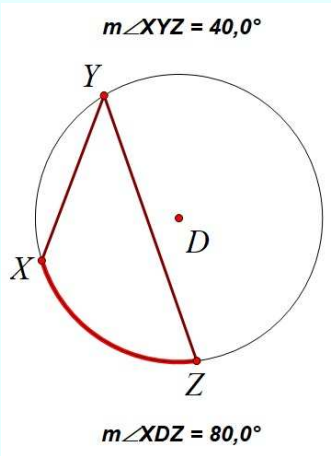
U prethodnom odjeljku otkrili ste sljedeće:



- Nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementarni (sve dok četverokut nije *ukršten*).
- Simetrale stranica tetivnog četverokuta uvijek prolaze središtem kružnice. Ovo središte naziva se *središtem opisane kružnice* tetivnog četverokuta.

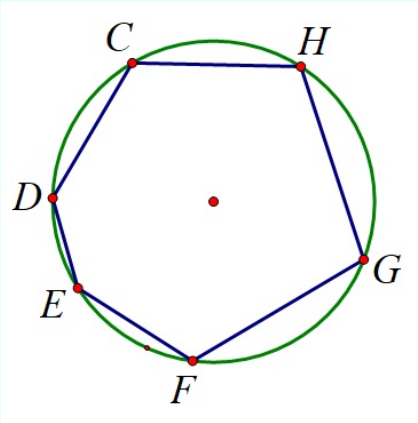
3. Prvo ćete objasniti drugo naslućivanje. U nastavku objašnjavanja napišite objašnjenje o presjeku simetrala tetivnog četverokuta. (*Savjet*: Prvo objasnite zašto simetrala svake stranice prolazi središtem kružnice. Konstruirajte radijuse koji će vam pomoći.)

4. Podsjetimo se da obodni kut ima upola manju mjeru od pripadnog središnjeg kuta (v. sl.). Koristite ovaj poučak o obodnom i središnjem kutu kako biste objasnili zašto su u tetivnom četverokutu nasuprotni kutovi suplementarni. (*Savjet*: U vašem originalnom sketchu, konstruirajte luk DF.)



Daljnje istraživanje

U tetivnomom šesterokutu, prikazanom na slici, pri vrhovima kutovi $\angle C, \angle E$ i $\angle G$ nazivaju se naizmjeničnim kutovima. Slično, kutovi $\angle D, \angle F$ i $\angle H$ su naizmjenični kutovi.



1. Konstruirajte tetivni šesterokut, izmjerite njegove kutove i izračunajte zbroj mjera kutova za oba skupa naizmjeničnih kutova. Što primjećujete?

2. Svojim riječima formulirajte naslućivanje na temelju vaših zapažanja u 1. pitanju.

3. Možete li logično objasniti svoje naslućivanje u 2. pitanju? (*Savjet*: Nacrtajte dijagonalu tako da se tetivni šesterokut podijeli na dva tetivna četverokuta.)

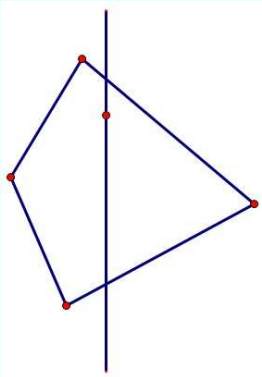
4. Koji su naizmjenični kutovi u tetivnom četverokutu $ABCD$? Preformulirajte svoje ranije rezultate za tetivne četverokute u terminima naizmjeničnih kutova.

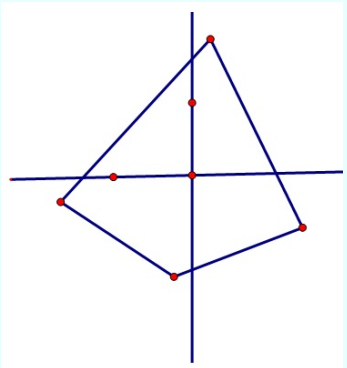
5. Možete li dalje generalizirati svoje naslućivanje o tetivnom šesterokutu, na tetivne osmerokute, tetivne deseterokute itd.? Drugim riječima, generalizirajte svoje naslućivanje na tetivne $2n$-terokute gdje je $n > 1$.

Težište trokuta

Točka uravnoteženja dvodimenzijskog ili trodimenzijskog objekta naziva se *njegovo središte gravitacije*. U arhitekturi i inženjerstvu, točno lociranje balansnih točaka je izuzetno važno za projektiranje stabilnih struktura koje se ne urušavaju. Možete locirati težište objekta eksperimentiranjem. Na primjer, kad kartonski poligon uravnotežite na vrhu olovke pronašli ste težište poligona.

Slike prikazuju drugi način određivanja položaja težišta kartonskog poligona. Poligon visi na pričvršćenoj žici blizu njegova ruba. Žica djeluje kao stolarski pravac koji pruža tesaru pravac okomit na tlo.





Četverokut visi iz prve improvizirane točke. Isti četverokut visi i iz druge točke. Prethodni pravac se i dalje prikazuje.

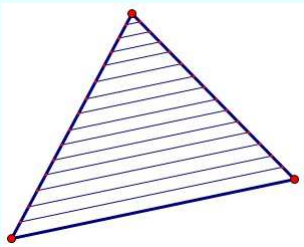
Težište se nalazi na mjestu gdje se ova dva pravca sijeku. Možete li objasniti zašto je to tako?

Kada koristite eksperimente za lociranje težišta, rezultati su kao takvi očito podložni nekoj eksperimentalnoj pogrješci.

U sljedećem istraživanju otkrit ćete točan geometrijski način lociranja težišta bilo kojeg trokuta.

Težište trokuta naziva se i *centroid*.

Zamislite trokut sastavljen od tankih vodoravnih greda, kako je prikazano na slici.



Gdje se nalaze težišta svih greda? Što možete pretpostaviti o njima?

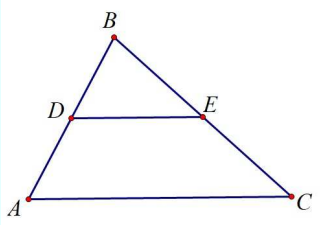
NASLUĆIVANJE: NALAŽENJE TEŽIŠTA

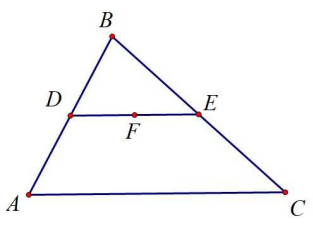
Otvorite datoteku `Srednjica trokuta.gsp`.

1. Povlačite točku D. Postoji li veza između dužina $\overline{DE}$ i $\overline{AC}$? Koja?
2. Gdje se nalazi težište za $\overline{DE}$?

   Konstruirajte težište F za $\overline{DE}$.

Za praćenje točke F, odaberite F i odaberite **Trag polovišta** u izborniku Zaslon





3. Predvidite putanju za točku F dok se točka D pomiče duž $\overline{AB}$. Skicirajte svoje predviđanje u trokutu na slici.

   Uključite trag točke F. Sada povucite točku D duž $\overline{AB}$.
4. Opišite putanju/stazu točke F.

S nepomičnom točkom F također odaberite točku D i odaberite **Lokus** iz izbornika Konstrukcije.

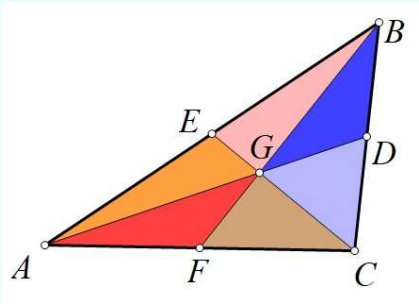
Budući da trag može nestati (ili se izbrisati), korisno je imati trajni *lokus* za putanju točke F. Isključite trag i konstruirajte ovaj lokus.

5. Ovu putanju/stazu točke F nazivamo *težišnicom*. Ukratko objasnite zašto težište cijelog trokuta mora ležati negdje na ovoj težišnici.
6. Napišite definiciju (opis) težišnice.
7. Opišite kraći način konstrukcije težišnice.

   Sada uporabite svoju metodu iz 7. pitanja za konstruiranje drugih dviju težišnica trokuta.
8. Povucite vrh svog trokuta. Što možete reći o presjeku tri težišnice trokuta?

NASLUĆIVANJE: SVOJSTVA TEŽIŠTA

U ovom istraživanju otkrit ćete i dokazati neka zanimljiva svojstva težišta trokuta.



Otvorite datoteku `Težište.gsp`. Povucite vrhove kako biste eksperimentirali u sketchu.

9. Težišnice $\triangle ABC$ su _____, _____ i _____.
   Težište je _____.

   Izmjerite duljine dijelova težišnica. Prikažite i omjere duljina.

10. Povucite vrh svog trokuta. Napišite naslućivanje o tome kako težište G dijeli svaku težišnicu trokuta.

    Sakrijte duljine i njihove omjere te pokažite površine manjih trokuta.

11. Povucite vrh i promatrajte sve odnose između šest područja.

    Napišite naslućivanje o površinama manjih trokuta nastalih zbog triju težišnica.

    Iako ste bez sumnje već uvjereni u svoja zapažanja, možete li objasniti, u smislu drugih, dobro poznatih geometrijskih rezultata, zašto su vaša zapažanja istinita?

    Matematičarima su korisna objašnjenja utemeljena na logičkim argumentima. Oni također shvaćaju da je pronalaženje ili razvoj prikladnog objašnjenja intelektualni izazov. Njima je to jednako privlačno kao i rješenje komplicirane zagonetke ili mozgalice te jednako vrijedno kao i stvaranje izvornog glazbenog, umjetničkog ili pjesničkog djela. To bi se također moglo usporediti s fizičkim izazovom dovršetka napornog maratona ili drugog fizičkog zadatka jer je to test intelektualne domišljatosti i izdržljivosti matematičara.

IZAZOV

Pokušajte logički objasniti bilo koje naslućivanje koje ste izveli u ovoj aktivnosti. Nakon što ste neko vrijeme razmislili i napravili neke bilješke, uporabite natuknice koje slijede kako bi se razvilo objašnjenje tri naslućivanja.

U prethodnim ste istraživanjima trebali napraviti tri zasebna naslućivanja:

Tri težišnice trokuta uvijek se sijeku u jednoj točki i ta je točka konkurentno težište.

Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta.

Šest malih trokuta $\triangle AFG, \triangle CGF, \triangle GDC, \triangle BDG, \triangle GEB$ i $\triangle AGE$ imaju jednake površine.

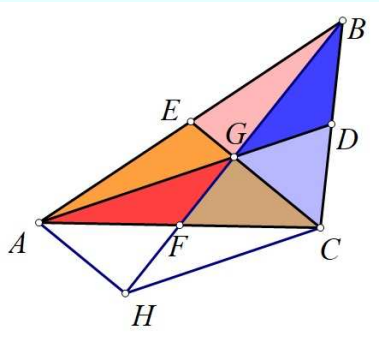
OBJAŠNJAVANJE

Počet ćete objašnjavajući prva dva naslućivanja. Razmislite o skici opet. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$ su težišnice koje se sijeku u točki G. Zamislite da spojite B s G i produljite ovu dužinu do F koja je na $\overline{AC}$. Trebamo dokazati da F uvijek mora biti polovište $\overline{AC}$ (drugim riječima, da je $\overline{BF}$ također težišnica pa se stoga sve tri sastaju u istoj točki G).

Produljite dužinu $\overline{BF}$ do točke H tako da je $|GH| = |GB|$. Povucite vrh izvornog trokuta za provjeru vaše konstrukcije.

Konstruirajte dužine $\overline{HA}$ i $\overline{HC}$.

Da biste na ovaj način produljili $\overline{BF}$, pokušajte uporabiti kružnicu i **polupravac** ili translatirajte označeni vektor pomoću naredbe iz izbornika Transformacije.



12. U $\triangle ABH$, što možete reći o $\overline{EG}$ u odnosu na $\overline{AH}$? Zašto?

13. U $\triangle CBH$, što možete reći o $\overline{DG}$ u odnosu na $\overline{CH}$? Zašto?

14. Pomoću 12. i 13. pitanja, odgovorite kakav je četverokut $AHCG$? Povucite točke za provjeru vašeg zaključka.

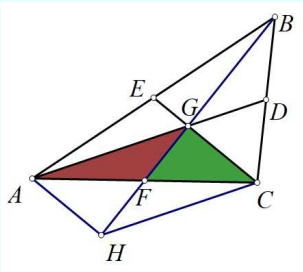
15. Na temelju 14. pitanja, možete li zaključiti o dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{GH}$ četverokuta $AHCG$?

16. Što možete zaključiti o F?

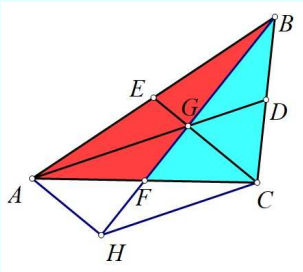
17. Na temelju 16. pitanja, možete li nešto reći o $\overline{FG}$ u odnosu s $\overline{GB}$? Zašto?

    Objasnite zašto šest trokuta imaju jednake površine.

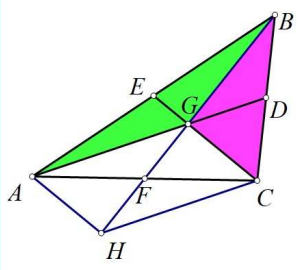
18. Razmotrite površine sljedećih parova susjednih trokuta: $\triangle AFG$ i $\triangle CFG$ (v. sl.), $\triangle CDG$ i $\triangle BDG$ te $\triangle BEG$ i $\triangle AEG$. Zašto su im površine jednake?



19. Što možete reći o površinama trokuta $\triangle AFB$ i $\triangle CFB$ (v. sl.)? Zašto?



20. Na temelju 18. i 19. pitanja, možete li nešto zaključiti o površinama trokuta $\triangle ABG$ i $\triangle CBG$? Zašto?



21. Što sada možete zaključiti o površinama trokuta $\triangle CDG$, $\triangle BDG$, $\triangle BEG$ i $\triangle AEG$? Zašto?

22. Sada dovršite logičko objašnjenje sami.

Prezentirajte svoje objašnjenje Napišite potpuna objašnjenja svoja tri izvorna naslućivanja. Možete koristiti pitanja 12. - 22. koja će vam pomoći.

Daljnje istraživanje

1. a. Možete li pronaći način pomoću geometrijskih konstrukcija u Sketchpadu za određivanje položaja težišta bilo kojeg "kartonskog" četverokuta?

   b. Provjerite svoju metodu u 1.a pitanju s konkavnim četverokutom. Što primjećujete o težištu konkavnog četverokuta?

   c. Pokušajte generalizirati svoju metodu iz 1.a pitanja na bilo koji poligon.

2. Američki atletičar **Dick Fosbury** zauvijek je promijenio način skoka u vis popularizacijom leđnog skakanja koji je postao poznat kao "flop Fosburyja". Fosbury je bio student na Sveučilištu Oregon State (1965. - 1969.) kada je iskoristio "flop" i takvim skokom postavio olimpijski rekord od 2 m i 24 cm u Mexico Cityju 21. listopada 1968. Mnogi su ismijavali njegov način skakanja. Fosburyjeva metoda "flopa" na kraju je zamijenila nekadašnju standardnu metodu "straddle" ili "škare" skakača u visinu. Zašto se ova nova metoda pokazala učinkovitijom od stare metode? (*Savjet*: To ima neke veze s težištem.)

3. Težište trokuta možete odrediti pomoću analitičke geometrije.

   a. Izmjerite koordinate vrhova vašeg trokuta i njegovo težište. Izračunajte prosjek koordinata vrhova. Što primjećujete? Provjerite svoje opažanje daljnjim povlačenjem.

b. Pretpostavimo da vrhovi trokuta imaju koordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3). Pokažite da su koordinate težišta aritmetička sredina koordinata vrhova, tj. da vrijedi

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

c. Pomoću programa Sketchpad odredite ili izračunajte "prosječne" koordinate vrhova četverokuta i nacrtajte točku s tim koordinatama. Usporedite ovu točku s težištem "kartonskog" četverokuta iz 1. pitanja. Što primjećujete?

3. Dokaz kao otkriće

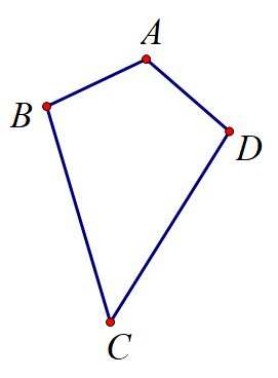
Scott Steketee u radu s nastavnicima u Hrvatskoj

Polovišta deltoida

U ovoj ćete aktivnosti istražiti četverokut kojeg određuju polovišta stranica deltoida. Prije početka ove aktivnosti, potrebno je poznavati svojstva deltoida i njegovih dijagonala.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Deltoid.gsp`



1. Povucite bilo koji vrh četverokuta. Koja svojstva ima taj četverokut da sa sigurnošću možeš tvrditi da je deltoid?

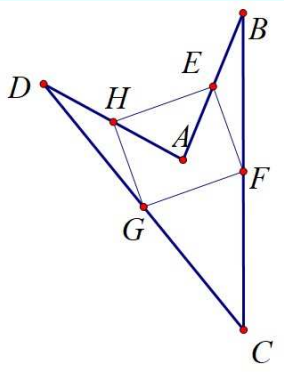
   Konstruirajte polovišta stranica deltoida.

   Spojite polovišta deltoida kako biste konstruirali četverokut $EFGH$. Konstruirani četverokut se ponekad naziva i *četverokutom polovišta*.

2. Povucite bilo koji vrh deltoida. Kakav je četverokut $EFGH$?

   Po potrebi izmjerite veličine njegovih kutova.

   Konstruirajte dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.



3. Što se događa kad deltoid $ABCD$ postane konkavan? Vrijedi li još uvijek vaše opažanje o četverokutu polovišta?

Izmjerite duljine dijagonala četverokuta $ABCD$.

4. Povucite bilo koju točku A, B, C i D. Može li $EFGH$ ikada biti kvadrat? Ako da, kada?

   U prethodnom istraživanju trebali ste otkriti

   - Četverokut određen polovištima stranica deltoida je pravokutnik.
   - Četverokut polovišta stranica deltoida je kvadrat samo ako su dijagonale deltoida kongruentne.

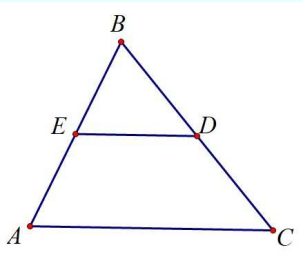
   Iako ste bez sumnje već uvjereni u istinitost vaših zapažanja, možete li *objasniti*, u smislu drugih geometrijskih činjenica, zašto su točna?

   Kao i ranije, daljnje istraživanje sa Sketchpadom vjerojatno bi vas moglo uvjeriti još više. No, znati *zašto* je nešto istinito znači razumijevanje toga mnogo dublje nego samo znanje iz eksperimentiranja. Ova potraga za dubljim razumijevanjem snažna je pokretačka snaga ne samo u matematici, već i u gotovo svim intelektualnim nastojanjima čovjeka.

   Na primjer, u fizici želimo razumjeti zašto se planeti okreću oko Sunca, u kemiji zašto određena kemikalija reagira s drugom, ali ne s nekim drugima ili zašto u ekonomiji postoji inflacija.

OBJAŠNJAVANJE

Prije nego što objasnite pretpostavke o četverokutu određenom polovištima stranica deltoida, trebat ćete ponešto zaključiti o trokutima.



Na novoj stranici sketcha konstruirajte $\triangle ABC$.

Konstruirajte polovišta D i E stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$.

Konstruirajte $\overline{DE}$. Tu ćemo dužinu nazvati *srednjica*.

Izmjerite duljine i nagibe srednjice $\overline{DE}$ i stranice $\overline{AC}$.

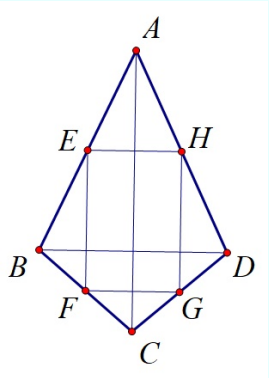
Izmjerite i izračunajte omjer $\dfrac{|\overline{ED}|}{|\overline{AC}|}$.

Povucite različite vrhove trokuta i promatrajte mjere i njihov omjer.

5. Napišite naslućivanje o odnosu između srednjice i odgovarajuće stranice njezinog trokuta.

   Možete li naslućivanjem koje ste iznijeli objasniti zašto je pretpostavka o polovištima stranicama trokuta istinita? Objašnjenje zašto je pretpostavka o srednjici istinita, može pričekati za kasnije, kada istražite dokaz kao sistematizaciju u poglavlju 6. Za sada možete samo prihvatiti istinitost naslućivanja o srednjici trokuta.

   Sljedeća pitanja će vam pomoći u traženju mogućih objašnjenja.



6. Objasnite kakav je odnos između $\overline{EF}$ i $\overline{AC}$ u $\triangle ACB$? Zašto?

7. Kakav je odnos između $\overline{HG}$ i $\overline{AC}$ u $\triangle ACD$? Zašto?

8. Što, dakle, možete zaključiti o $\overline{EF}$ i $\overline{HG}$?

9. Kakav je odnos između $\overline{EH}$ i $\overline{BD}$ u $\triangle ABD$? Zašto?

10. Kakav je odnos između $\overline{FG}$ i $\overline{BD}$ u $\triangle CBD$? Zašto?

11. Prema 9. i 10. pitanju, možete li nešto zaključiti o $\overline{EH}$ i $\overline{FG}$?

12. Prema 8. pitanja i/ili 11. pitanja, možete li nešto zaključiti do sada o četverokutu $EFGH$?

13. S obzirom na to da su dijagonale deltoida uvijek okomite (provjerite jesu li takve!), možete li sada nešto zaključiti o odnosima između susjednih stranica četverokuta $EFGH$?

14. Ako je $|AC| = |BD|$, možete li sada nešto reći o stranicama četverokuta $EFGH$?

OTKRIVANJE

Do sada smo vidjeli da se novi rezultati u matematici mogu otkriti eksperimentiranjem. Ponekad, međutim, jednostavno možete doći do novih otkrića pomno razmišljajući o vašim logičkim objašnjenjima. Dobro objašnjenje daje uvid u to zašto je nešto istinito i ponekad to može otkriti određene uvjete koji nisu nužni te da je taj rezultat samo poseban slučaj općenitijeg.

15. Jeste li koristili bilo koje svojstvo isključivo deltoida od 6. pitanja do zaključka u 12. pitanju?

16. Što dakle možete zaključiti o *bilo kojem* četverokutu iz svog zaključka u 12. pitanju? (Napravite konstrukciju za provjeru ako želite.)

17. Osim svojstva okomitih dijagonala, jeste li koristili u vašem zaključku u 13. pitanju i neko drugo svojstvo deltoida?
(Na primjer, jeste li koristili svojstvo da deltoid ima os simetrija ili dva para susjednih stranica koje su jednakih duljina?)

18. Pomoću 17. pitanja opišite četverokut kojemu je četverokut polovišta uvijek pravokutnik.

19. Osim uloge objašnjenja, koje je prikazano u drugoj aktivnosti, u čemu je nova uloga logičkog argumenta pokazanog u pitanjima 15. - 18.?

IZAZOV

Koristite Sketchpad za konstrukciju četverokuta čiji je četverokut polovišta uvijek pravokutnik. Opišite svoju konstrukciju.

Prezentirajte svoje objašnjenje

Objedinite svoje objašnjenje na pitanja 6. - 14., odnosno svoja otkrića u pitanjima 15. - 19. Svoje objašnjenje možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Logičko otkriće

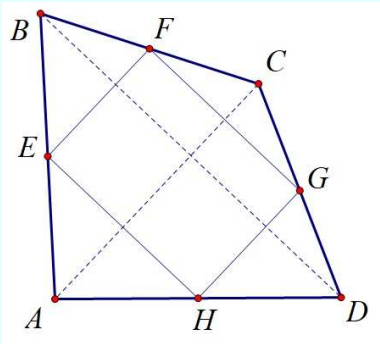
U prethodnim aktivnostima možda ste otkrili geometrijska svojstva tako što ste prvo načinili konstrukciju Sketchpadom, a zatim izradili logičko objašnjenje zašto svojstvo mora biti istinito.

U matematičkim istraživanjima eksperimentiranje ne prethodi uvijek logičkom rasuđivanju. Kao što ćete vidjeti u ovoj aktivnosti, ljudi otkrivaju i nova geometrijska svojstva prvo logičkim zaključivanjem. Tek nakon toga slijede konstrukciju i mjerenje kako bi bili sigurni da lažne pretpostavke ili zaključci nisu doneseni.

OTKRIVANJE

Ranije ste otkrili da, ako se polovišta susjednih stranica bilo kojeg četverokuta spoje dužinama, dobivate _____.

Ovaj rezultat je također poznat kao Varignonov teorem, kasnije nazvan po **Pierreu Varignonu**, koji ga je prvi dokazao 1731. i logički objasnio. Sada, bez korištenja konstrukcija ili mjerenja, koristeći prikazani dijagram, odgovorite na sljedeća pitanja.



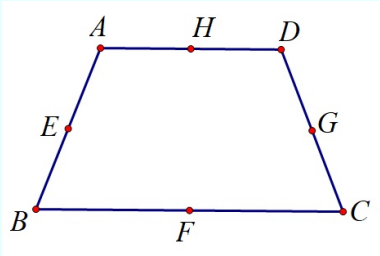
1. Napišite tvrdnju koja opisuje odnos duljina $|EF|$ i $|HG|$ prema duljini $|AC|$.
2. Napišite tvrdnju koja povezuje $|EH|$ i $|FG|$ s $|BD|$.
3. Objasnite kako ste došli do svoje tvrdnje u pitanjima 1. i 2.
4. Pomoću napisanih tvrdnji u 1. i 2. pitanju opišite odnos između opsega upisanog paralelograma $EFGH$ i dijagonala četverokuta $ABCD$.

PROVJERITE KONSTRUKCIJOM

Napravite konstrukcije s odgovarajućim mjerenjima u Sketchpadu kako biste potvrdili svoje zaključke iz 4. pitanja. Svakako provjerite konkavni i ukršteni slučaj četverokuta $ABCD$. Prezentirajte svoje zaključke. Vaša prezentacija može uključivati i prezentaciju Sketchpadovom datotekom/skicom. Ako želite, prodiskutirajte svoje tvrdnje u paru ili grupi.

Polovišta jednakokračnog trapeza

U ovoj ćete aktivnosti istraživanjem saznati činjenice o četverokutima koje definiraju uzastopna polovišta stranica jednakokračnih trapeza.



NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Jednakokračni trapez s polovištima.gsp`.

1. Povucite bilo koji vrh četverokuta. Koja svojstva ima taj četverokut zbog kojih sa sigurnošću možete tvrditi da je jednakokračni trapez?

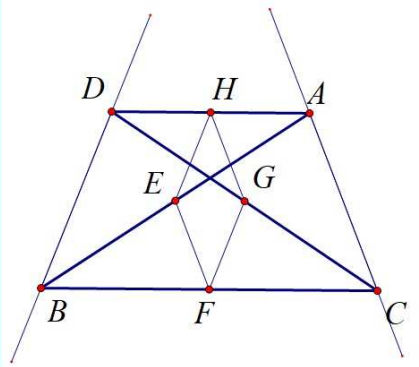
   Pritisnite gumb za prikaz polovišta stranica jednakokračnog trapeza $ABCD$.

   Pritisnite gumb za povezivanje polovišta, tvoreći $EFGH$. Ovaj četverokut se ponekad naziva *četverokut polovišta*.

2. Kakav je četverokut polovišta $EFGH$? Povucite vrhove i pokažite mjerenja kako biste provjerili svoju pretpostavku.

   Pritisnite gumb za prikaz dijagonala četverokuta $ABCD$. Ovaj gumb također prikazuje mjeru kuta s vrhom u sjecištu dijagonala.

3. Povucite bilo koju od točaka A, B, C i D. Može li $EFGH$ ikada biti kvadrat? Ako da, kada?



4. Povucite vrh četverokuta $ABCD$ tako da se dvije stranice/kraka sijeku. Ovakav se četverokut naziva *ukršteni četverokut*. Razmotrite svoja zapažanja iz 2. i 3. pitanja i utvrdite da li još uvijek vrijede ako je $ABCD$ ukršten? Objasnite.

IZAZOV

U sljedećem dijelu ove aktivnosti objasnit ćete zašto su vaša naslućivanja iz 2. i 4. pitanja točna. Pokušajte izgraditi vlastita objašnjenja prije nego što pročitate naputke koji slijede.

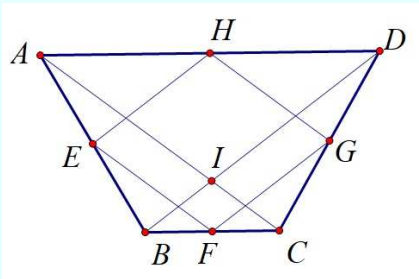
ISTRAŽIVANJE

Trebali ste otkriti dvije pretpostavke:

- Četverokut određen polovištima stranica jednakokračnog trapeza je romb.
- Četverokut određen polovištima stranica jednakokračnog trapeza je kvadrat samo ako su dijagonale jednakokračnog trapeza međusobno okomite.

Iako ste bez sumnje već uvjereni u ova zapažanja, možete li *objasniti*, u smislu drugih geometrijskih činjenica, zašto su vaša zapažanja istinita? Ispod slike su navedena pitanja koja će vas usmjeriti prema objašnjenju vaših zapažanja.

Počet ćete objašnjavajući prvo naslućivanje. Zatim ćete u 12. pitanju objasniti drugo naslućivanje.



5. U kakvom su odnosu $\overline{EF}$ i $\overline{AC}$ u $\triangle ACB$? Zašto?
6. U kakvom su odnosu $\overline{HG}$ i $\overline{AC}$ u $\triangle ACD$? Zašto?
7. Što se može zaključiti iz pitanja 5. i 6. o dužinama $\overline{EF}$ i $\overline{HG}$?
8. U kakvom su odnosu $\overline{EH}$ i $\overline{BD}$ u $\triangle ABD$ Zašto?
9. U kakvom su odnosu $\overline{FG}$ i $\overline{BD}$ u $\triangle CBD$? Zašto?

10. Što se može iz 8. i 9. pitanja zaključiti o dužinama $\overline{EH}$ i $\overline{FG}$?

11. Budući da su duljine dijagonala jednakokračnog trapeza uvijek jednake, što možete zaključiti o odnosu između susjednih stranica četverokuta $EFGH$?

12. Ako je $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, što onda možete reći o kutovima četverokuta $EFGH$?

OTKRIVANJE

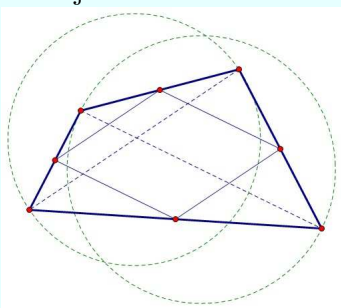
13. Osim svojstva sukladnih dijagonala, jeste li koristili još koje svojstvo isključivo za jednakokračne trapeze, za vaš zaključak u 11. pitanju? (Na primjer, jeste li koristili svojstvo jednakokračnog trapeza koji ima jedan par paralelnih stranica ili jednu os simetrije?)

14. Pomoću 13. pitanja opišite četverokut koji ima romb kao četverokut polovišta.

15. Do sada smo vidjeli da se novi rezultati u matematici mogu otkriti pomoću eksperimentiranja, logičkog zaključivanja ili pažljivog razmišljanja o logičkim objašnjenjima. Koji od ova tri različita načina najbolje opisuje vaše zaključke u 13. ili 14. pitanju?

IZAZOV

Konstruirajte u Sketchpadu četverokut čiji je četverokut polovišta uvijek romb. Prikazana slika daje to naslutiti. Kad uspijete, opišite svoju konstrukciju. Također možete pokušati konstruirati četverokut čiji je četverokut polovišta uvijek kvadrat.



Prezentirajte svoje objašnjenje

Objedinite svoje objašnjenje na pitanja 5. - 8., odnosno 13. - 14. Svoje objašnjenje možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom. Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

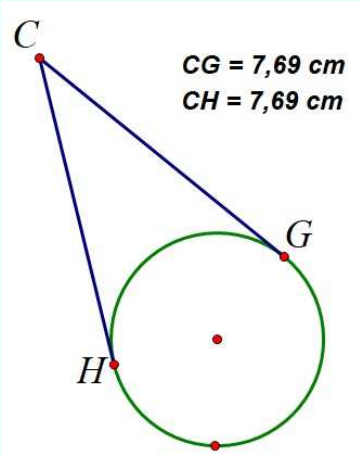
Logičko otkriće: tangencijalni četverokut

U ranijim ste aktivnostima možda otkrili geometrijska svojstva uporabom konstrukcije Sketchpadom, a zatim naveli logičko objašnjenje zašto svojstvo mora biti istinito.

U matematičkim istraživanjima eksperimentiranje ne prethodi uvijek logičkom rasuđivanju. Kao što ćete vidjeti u sljedećoj aktivnosti, ljudi otkrivaju i nova geometrijska svojstva logičkim zaključivanjem. Tek nakon toga slijedi konstrukcija i mjerenje kako bismo bili sigurni da nisu donesene lažne pretpostavke ili zaključci.

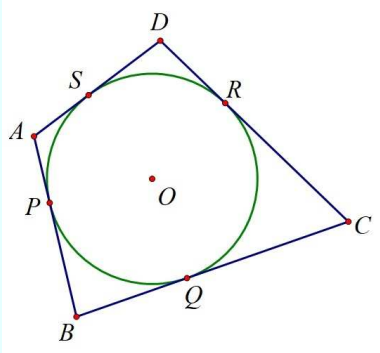
OTKRIVANJE

U ovoj ćete aktivnosti logičnim zaključcima doći do zanimljivog svojstva četverokuta kojemu su stranice tangente upisanoj kružnici. Drugim riječima, četverokut je opisan kružnici (tangencijalni četverokut). Podsjetimo da su odsječci tngenata od točke C izvan kružnice do dirališta H i G s kružnicom jednakih duljina, tj. vrijedi $|CH| = |CG|$ (v. sl.).



Bez uporabe konstrukcije/crtanja ili mjerenja, razmotrite sljedeća pitanja. Koristite sliku ispod koji prikazuje četverokut kojemu su sve četiri stranice tangente kružnice (*tangencijalni četverokut*).

1. Razmotrimo vrh A opisanog četverokuta $ABCD$. Što možemo reći o udaljenostima $|AP|$ i $|AS|$?



2. Što možete reći o udaljenostima $|BP|$ i $|BQ|$, udaljenostima $|CQ|$ i $|CR|$ i udaljenostima $|DR|$ i $|DS|$?

3. Označite $|AP|$ kao a, $|BP|$ kao b, $|CR|$ kao c i $|DR|$ kao d i napišite izraz za $|AB| + |CD|$.

4. Na temelju svojih zapažanja u 1. i 2. pitanju napišite izraz s oznakama a, b, c i d za $|BC| + |AD|$.

5. Usporedite 3. i 4. pitanje. Što primjećujete?

6. Svoj zaključak u 5. pitanju formulirajte vlastitim riječima i prodiskutirajte u paru ili grupi.

7. Prema 6. pitanju, koja bi vrsta četverokuta bio $ABCD$ ako je $|AB| = |AD|$?

PROVJERITE KONSTRUKCIJOM

Otvorite datoteku `Tangencijalni četverokut.gsp` i razmotrite neka mjerenja i izračune koji potvrđuju vaš zaključak iz pitanja 6. To možete otkriti povlačenjem točaka P, Q, R i S, ali ne i točaka A, B, C i D.

Daljnje istraživanje

1. Konstruirajte simetrale kutova svih kutova tangencijalnog četverokuta. Što primjećujete? Možete li objasniti svoje zapažanje?

2. Koji četverokuti (na primjer, paralelogrami, pravokutnici, kvadrati, deltoidi ili rombovi) su posebni slučajevi tangencijalnog četverokuta? Istražite činjenice tako da pomicanjem promijenite oblik svog tangencijalnog četverokuta u svaki od spomenutih slučajeva.

3. Je li moguće dobiti konkavan tangencijalan četverokut? Ako je odgovor da, vrijedi li još uvijek zaključak koji ste zapisali u 6. pitanju?

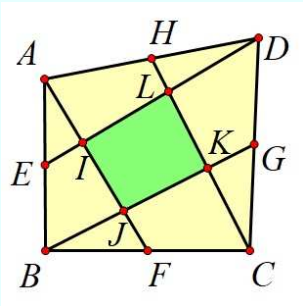
4. Dokaz kao provjera

Scott Steketee u Hrvatskoj

Površine

U ovoj aktivnosti usporedit ćete površinu čitavog četverokuta s površinom manjeg četverokuta konstruiranog unutar njega.

Da biste pronašli omjer između dva mjerenja, odaberite izbornik Broj a zatim kliknite na mjerenje za unos u Računalo.

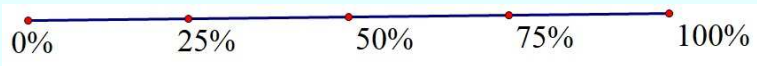


NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Površine.gsp`

Izračunajte omjer površine četverokuta $ABCD$ i površine četverokuta $IJKL$. (Točke E, F, G i H su polovišta odgovarajućih stranica.)

1. Što primjećujete u tom omjeru?
2. Povucite bilo koji vrh četverokuta $ABCD$ na novi položaj. Vrijedi li vaše zapažanje?
3. Zapišite što naslućujete.
4. Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Prikažite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.



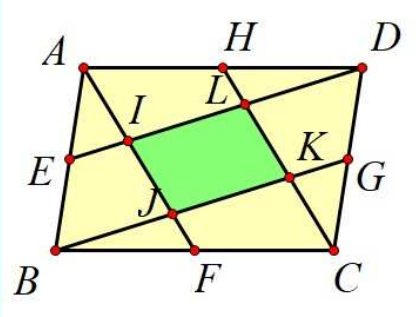
IZAZOV

Ako vjerujete da je vaše naslućivanje u 3. pitanju uvijek istinito, ponudite nekoliko primjera kojima ćete ilustrirati vaš stav i pokušajte uvjeriti druge učenike u razredu. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičkim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate u svoju pretpostavku da nije uvijek istinita, pokušajte navesti barem jedan protuprimjer.

Ponovite prethodno ispitivanje za paralelogram.

Otvorite datoteku `Površine 2.gsp`

Opet izračunajte omjere površina dva četverokuta $ABCD$ i $IJKL$.

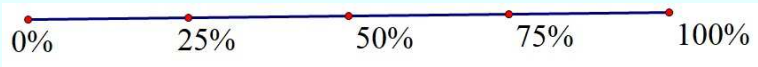


5. Što sada primjećujete o ovom omjeru?

6. Povucite bilo koji od vrhova paralelograma $ABCD$ na novi položaj. Vrijede li vaša zapažanja/naslućivanja/pretpostavke i dalje?

7. Formulirajte pretpostavku na temelju svojih zapažanja.

8. Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Prikažite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

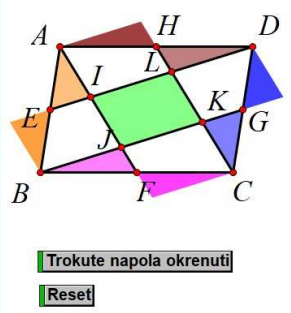


IZAZOV

Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera kojima ćete ilustrirati vaš stav i pokušajte uvjeriti druge učenike u razredu. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate u svoje naslućivanje da nije uvijek istinito, pokušajte navesti barem jedan protuprimjer.

OBJAŠNJAVANJE

Pritisnite gumb **Trokute napola okrenuti**. Što primijećujete? Koristite svoje zapažanje kako biste objasnili zašto je vaša pretpostavka za paralelogram istinita.

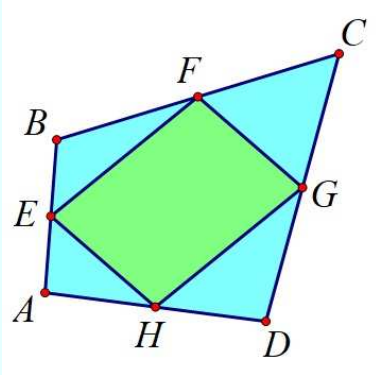


Varignonova površina

U ovoj aktivnosti usporedit ćete površinu četverokuta s površinom drugog četverokuta konstruiranog unutar njega.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Varignonova površina.gsp` i povucite vrhove za istraživanje likova u ovom crtežu ili ovoj datoteci.



1. Točke E, F, G i H su polovišta stranica četverokuta $ABCD$. Opišite poligon $EFGH$.

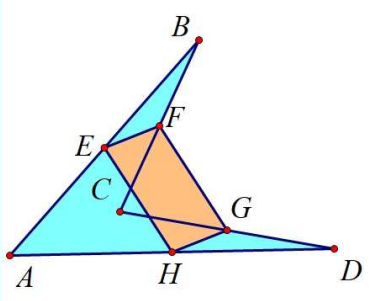
   Pritisnite odgovarajući gumb za prikaz površina dvaju poligona koje opisujete. Povucite vrh i promatrajte površine.

2. Opišite kako su površine povezane. Odredite njihov omjer.

3. Povucite bilo koju od točaka A, B, C i D i promatrajte dva područja

mjerenja. Mijenja li se njihov omjer?

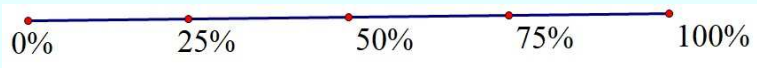
Da biste pronašli omjer između dva mjerenja, odaberite izbornik Broj, a zatim kliknite na mjerenje za unos u Računalo.



4. Povucite vrh $ABCD$ dok ne dobijete konkavan četverokut. Mijenja li se sada omjer površina?

5. Zapišite punim rečenicama svoja naslućivanja.

6. Vjerojatno se možete sjetiti primjera kada se nešto naizgled uvijek istinito, ponekad pokazalo lažnim. (Prethodna aktivnost je geometrijski primjer ovakve pojave.) Zbog čega ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Zapišite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.



IZAZOV

Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera kojima ćete podržati vaš stav i pokušati uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte pružiti protuprimjer.

DOKAZIVANJE

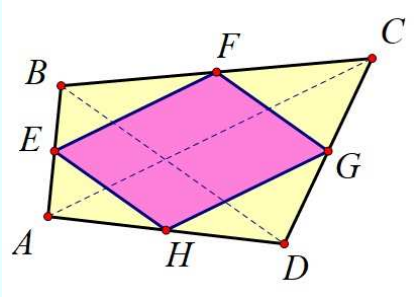
Na slici ste vjerojatno primijetili da je četverokut $EFGH$ paralelogram. Vjerojatno ste i vi napravili pretpostavku koja je slična kao ovoj pretpostavci:

> Površina paralelograma nastalog spajanjem polovišta stranica četverokuta je upola manja od površine četverokuta.

Ova prva pretpostavka o četverokutu $EFGH$ podudara se s geometrijskim teoremom koji se ponekad naziva *Varignonov teorem*. **Pierre Varignon** je bio svećenik i matematičar rođen 1654. godine u Caenu

u Francuskoj. Poznat je po radu u računu (kalkulusu) i u mehanici, uključujući otkrića koja se odnose na fluide i vodene satove.

Sljedeća tri pitanja pomoći će vam u provjeri je li četverokut $EFGH$ paralelogram. Ako ste to već provjerili, prijeđite na 10. pitanje.

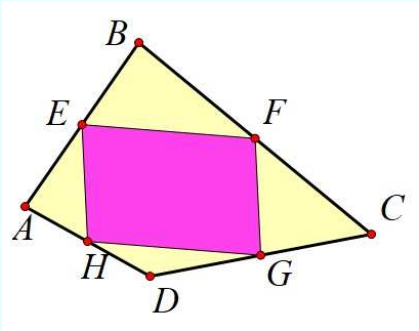


7. Konstruirajte dijagonalu $\overline{AC}$. Kako su $\overline{EF}$ i $\overline{HG}$ povezane s $\overline{AC}$? Zašto?

8. Konstruirajte dijagonalu $\overline{BD}$. Kako su $\overline{EH}$ i $\overline{FG}$ povezane s $\overline{BD}$? Zašto?

9. Pomoću 7. i 8. pitanja objasnite zašto $EFGH$ mora biti paralelogram.

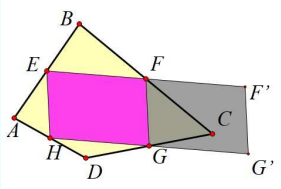
   Sljedeći koraci ili odgovori na sljedeća pitanja pomoći će vam objasniti zašto je površina paralelograma $EFGH$ upola manja od površine četverokuta $ABCD$.



10. Pretpostavimo za sada da je $ABCD$ konveksan. Jedno objašnjenje zašto $ABCD$ ima dvostruko veću površinu od $EFGH$ možete uočiti kad pogledate područja koja su unutar $ABCD$, ali nisu unutar $EFGH$. Opišite ova područja.

11. Prema vašem naslućivanju, kakva bi trebala biti ukupna površina područja koju ste opisali u 10. pitanju usporedivši je s područjem $EFGH$?

Pritisnite gumb za translatiranje četverokuta $EFGH$ pomoću vektora $\overrightarrow{EF}$.



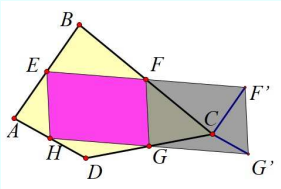
12. Povucite bilo koju točku. Kolika je površina translatiranog četverokuta usporedivši je s površinom $EFGH$?

Konstruirajte $\overline{F'C}$ i $\overline{G'C}$.

13. Postoji li veza između trokuta $\triangle EBF$ i $\triangle F'CF$?

14. Objasnite zašto odnos koji ste opisali u 13. pitanju mora biti istinit.

15. Kako je $\triangle HDG$ povezan s $\triangle G'CG$?



16. Objasnite zašto odnos koji ste opisali u 15. pitanju mora biti istinit.

17. Kako je $\triangle AEH$ povezan s $\triangle CF'G$?

18. Objasnite zašto odnos koji ste opisali u 17. pitanju mora biti istinit.

19. Morate uzeti u obzir još jedan trokut. Objasnite kako se zadnji uklapa u vaše objašnjenje.

Prezentirajte svoj dokaz

Napravite prezentaciju svog dokaza iz pitanja 10. - 19. Vaša prezentacija može uključivati prezentaciju Sketchpadom i njegovu datoteku/skicu. Ako želite, prodiskutirajte svoj dokaz u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

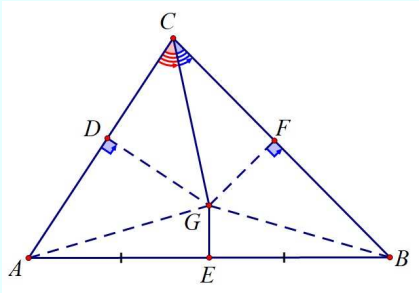
Koji dio vašeg dokaza ne funkcionira za konkavne četverokute? Pokušajte ponoviti dokaz tako da objasnite i konkavni slučaj.
(*Savjet*: Povucite točku C tako da četverokut $ABCD$ bude konkavan.)

Logički paradoks

Ponekad naizgled točan logički argument može dovesti do paradoksa. Obradite sljedeći logički argument u odnosu na prikazani crtež. Nemojte još koristiti Sketchpad. Kasnije ćete ga koristiti za provjeru valjanosti ovog argumenta.

NASLUĆIVANJE

Na slici je prikazana sljedeća konstrukcija.



- Trokut $\triangle ABC$ je bilo koji trokut.
- $\overline{CG}$ je na simetrali kuta $\angle ACB$, a $\overline{GE}$ je na simetrali dužine $\overline{AB}$.
- $\overline{GD}$ je okomita na $\overline{AC}$ i $\overline{GF}$ je okomita na $\overline{BC}$.

1. Što možete reći o trokutima $\triangle CGD$ i $\triangle CGF$? Zašto?
2. Na temelju prvog pitanja, možete li nešto zaključiti o $\overline{DG}$ i $\overline{FG}$?
3. Što možete reći o $\overline{AG}$ i $\overline{BG}$? Zašto?
4. Što sada možete zaključiti o trokutima $\triangle GDA$ i $\triangle GFB$? Zašto?
5. Na temelju 4. pitanja, možete li nešto zaključiti o $\overline{DA}$ i $\overline{FB}$?
6. Na temelju 1. pitanja, možete li nešto zaključiti o $\overline{CD}$ i $\overline{CF}$?
7. Što sada možete zaključiti o $|CD|+|DA|$ i $|CF|+|FB|$ i dakle o $|CA|$ i $|CB|$?
8. Možete li nešto zaključiti iz 7. pitanja o vrsti trokuta $\triangle ABC$?

RAZMISLITE

Vrijedi li ovaj argument za *bilo* koji trokut ABC? U čemu je problem? Gdje je pogrješka? Razgovarajte u paru ili grupi.

PROVJERITE KONSTRUKCIJOM

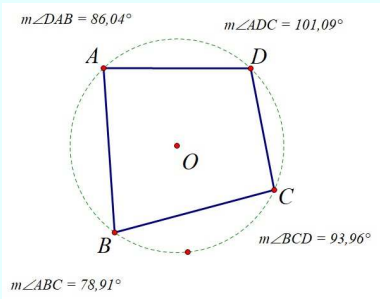
Provedite točnu konstrukciju u Sketchpadu kako biste provjerili osigurava li ovaj prikazani crtež temelj za logički argument. Što primjećujete? Koju važnu lekciju možete naučiti iz ovoga?

Za konstrukciju simetrale kuta odaberite tri točke na kutu (pri čemu je vrh kuta srednja točka). Zatim odaberite **Simetrala kuta** iz izbornika Konstrukcije.
Za konstrukciju okomice, odaberite točku i ravni objekt. Zatim odaberite **Okomica** iz izbornika Konstrukcije.

Razmatranje o tetivnom četverokutu

Tetivni četverokut je svaki četverokut kojemu se može opisati kružnica.

U prethodnim aktivnostima s tetivnim četverokutom, primijetili ste da *ako je tetivni četverokut konveksan, onda su njegovi nasuprotni kutovi* _____.



U ovoj aktivnosti istražit ćete obrnutu tvrdnju. Prije toga zapišite svojim riječima obrnutu tvrdnju.

NASLUĆIVANJE

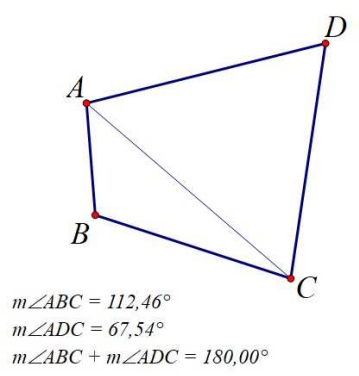
Otvorite datoteku `Tetivni četverokut.gsp`

Povucite točku D tako da $\angle ABC$ i $\angle CDA$ budu suplementarni kutovi.

Pritisnite gumb za prikaz opisane kružnice trokutu $\triangle ABC$.

1. Opažate li neko svojstvo kod četverokuta $ABCD$? Koje?

   Pritisnite gumb da biste sakrili opisanu kružnicu trokutu $\triangle ABC$.



   Sada povucite A, B ili C za promjenu trokuta. Ponovite drugi i treći korak. Pokušajte ovo za nekoliko različitih položaja točaka A, B i C.

2. Pročitajte obrnutu tvrdnju koju ste napisali na početku ove aktivnosti. Objasnite potvrđuje li vaš sketch ovu tvrdnju ili je u suprotnosti s njom.

3. Koliko ste sigurni da je vaš odgovor u 2. pitanju uvijek istinit? Zapišite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

IZAZOV

Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera za tu tvrdnju i pokušajte uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte za to navesti protuprimjer.

DOKAZIVANJE

Vjerojatno ste stvorili sljedeću pretpostavku:

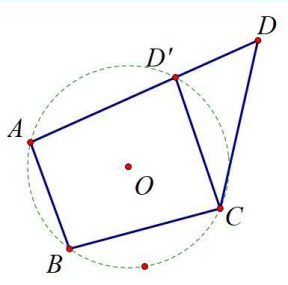
Ako su nasuprotni kutovi konveksnog četverokuta suplementarni, taj je četverokut tetivni.

Ili alternativno:

Ako je zbroj mjera oba para nasuprotnih kutova konveksnog četverokuta jednak, taj je četverokut tetivni.

Možete koristiti logički argument za potvrdu ove pretpostavke. Logičan argument ne samo da nam daje razumijevanje zašto je nešto istina, već nam također može pomoći u utvrđivanju opće valjanosti rezultata. Logičan argument u matematici čija je svrha dokazivanje obično se naziva *dokaz*.

Gornju pretpostavku možete dokazati metodom koja se naziva *dokaz kontradikcijom*. U ovoj vrsti dokaza, na početku se kreće od pretpostavke da je zaključak lažan. Tada pokazujete da to dovodi do kontradikcije, što ukazuje na to da je vaš zaključak morao biti istinit. Stoga počinjemo s pretpostavkom da su suprotni kutovi konveksnog četverokuta $ABCD$ suplementarni, ali da četverokut $ABCD$ *nije* tetivni.



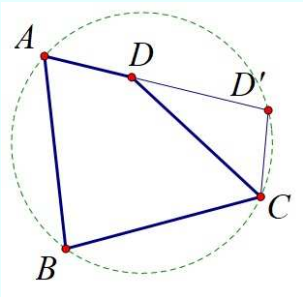
Pritisnite gumb za konstruiranje tetivnog četverokuta $ABCD'$. Točka D' je presjek zrake AD i opisane kružnice trokutu $\triangle ABC$.

Prvo ćete razmotriti slučaj u kojem je D izvan kružnice. Ako D nije izvan kružnice, povlačite vrhove u skici sve dok to nije slučaj.

4. U kakvom su odnosu kutovi $\angle ABC$ i $\angle AD'C$? Zašto?
5. U kakvom su odnosu kutovi $\angle ABC$ i $\angle ADC$?

   (Ovaj odnos ne odgovara mjerama na vašoj skici!)
6. Što dakle možete zaključiti o $\angle ADC$ i $\angle AD'C$?
7. Razmotrite mjeru vanjskog kuta $\angle AD'C$ trokuta $\triangle DCD'$. Napišite izraz koji se odnosi na mjere unutarnjih kutova $\angle ADC$ i $\angle DCD'$.
8. Usporedite svoje odgovore na 6. i 7. pitanje. Što možete zaključiti o njima? Što vaš zaključak implicira o D i D'?

   Još morate razmotriti slučaj u kojem je D unutra kružnice. Povucite D tako da vaš sketch predstavlja ovaj slučaj.
9. Primjenjujući istu vrstu argumenta, dokažite da $ABCD$ mora biti tetivni i u ovom slučaju.



Prezentirajte svoj dokaz

Objedinite svoje objašnjenje na pitanja 4. - 9. Svoj dokaz možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

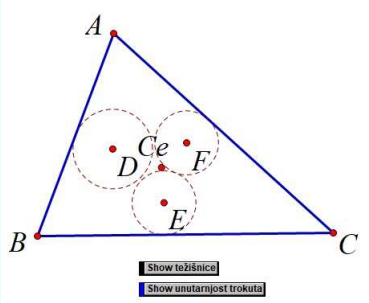
Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Konkurentnost

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Konkurentnost.gsp`

Povucite vrhove u sketchu da biste se upoznali s promjenama.



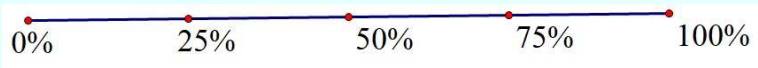
1. Točka Ce konstruirana je kao posebna točka. Objasnite u kakvoj je vezi s $\triangle ABC$ ta vrsta točke. Pritisnite gumbe na skici za upute.

2. Tri kružnice na vašem crtežu također su konstruirane na poseban način. Objasnite o kakvim se kružnicama radi u odnosu na $\triangle ABC$. Pritisnite gumbe na skici za upute.

   Konstruirajte dužine $\overline{AE}, \overline{BF}$ i $\overline{CD}$.

3. Što primjećujete o dužinama $\overline{AE}, \overline{BF}$ i $\overline{CD}$? Povucite bilo koji vrh $\triangle ABC$ provjeravajući vaše naslućivanje. Svakako isprobajte trokute različitih veličina. Od pomoći je skrivanje težišnica ili unutarnjih trokuta koji se prikazuju.

4. Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Zapišite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

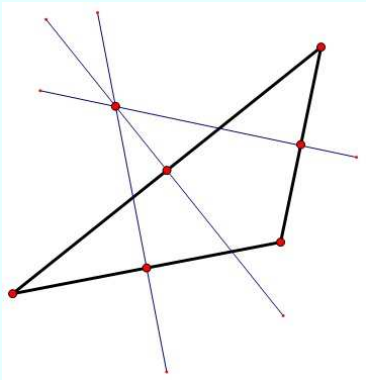


IZAZOV

Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera za tu tvrdnju i pokušajte uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte za to navesti protuprimjer.

Visine trokuta

Možda ste prethodno promatrali i dokazali da su *simetrale stranica* bilo kojeg trokuta uvijek konkurentne, tj. da se sijeku u jednoj točki. U ovoj aktivnosti ćete provjeriti neka naslućivanja o *visinama* trokuta.



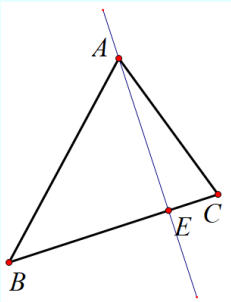
Točnost i sigurnost Sketchpada

U zalonu **Uređivanje**| **Jedinice**| **Preciznost**| **stotinka** (za sva mjerenja koja trebaju tj. za **Kut, Udaljenost** ili **Drugi nijedan**) postavite točnost.

Kao što ste vidjeli u aktivnosti **Površine**, trebate biti oprezni kod donošenja prosudbe samo na temelju vizualnog opažanja. Iako je Sketchpad vrlo precizan i moćan alat za vizualizaciju, morate i dalje biti vrlo oprezni da ne postavite lažne pretpostavke. Osigurajte da su sva mjerenja postavljena na maksimalnu točnost. Morate pogledati ekstremne slučajeve i gdje god je moguće iskoristiti animacijske mogućnosti programa Sketchpad radi provjere valjanosti naslućivanja. U konačnici, međutim, samo korektno logičko objašnjenje, odnosno dokaz može osigurati potpunu sigurnost.

Imajte na umu da u svakodnevnom životu često govorimo da je nešto istina, iako znamo da povremeno postoje iznimke. U matematici nas, međutim, zanimaju samo naslućivanja koja su *uvijek* istinita. Matematika se stoga razlikuje od svakodnevnog života u tome što apsolutno nisu dopuštene iznimke: samo je jedan protuprimjer potreban da bi se dokazalo da je pretpostavka lažna jer izuzetak ruši pravilo, tj. ne potvrđuje ga kako se obično pogrješno tvrdi.

NASLUĆIVANJE



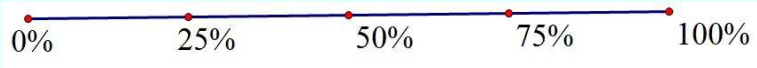
Otvorite datoteku `Visine.gsp`

Dužina povučena iz vrha trokuta koja je okomita na njegovu nasuprotnu stranicu naziva se *visinom*. Točka u kojoj visina dodiruje (ili pravac na kojem ona leži siječe) nasuprotnu stranicu naziva se njezinim *nožištem*.

Pritisnite gumbe u svojem sketchu za prikaz svih visina i nožišta $\triangle ABC$.

1. Povucite bilo koji vrh $\triangle ABC$. Što uočavate o visinama trokuta? Provjerite istinitost svog zapažanja za tupokutan trokut.

2. **Sigurnost:** Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje iz 1. pitanja uvijek istinito? Zapišite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.



IZAZOV

Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera koji ilustriraju/podržaju vaš stav i pokušajte uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte za to navesti protuprimjer.

DOKAZIVANJE

Razmotrimo sljedeću izjavu matematičara **Morrisa Klinea** (1985, 11-12):

Zaključivanje indukcijom i analogijom zahtijeva promatranje pa čak i eksperimentiranje kako bi se dobile činjenice na temelju kojih će se zasnivati svaki argument. No, osjetila su ograničena i netočna. Štoviše, čak i kad činjenice prikupljene u svrhu indukcije i analogije dobro zvuče, ove metode ne daju neupitne zaključke . . .

Kako bi izbjegao ove izvore pogrješaka, matematičar koristi drugu metodu zaključivanja ... u deduktivnom zaključivanju zaključak je logički neizbježna posljedica poznatih činjenica.

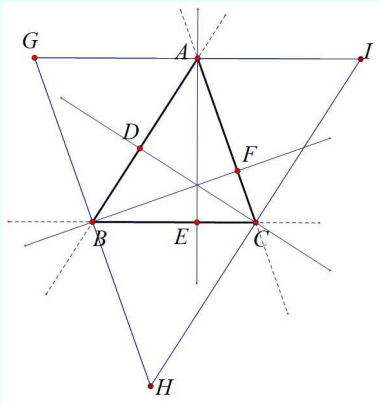
3. Komentirajte kako je ovaj citat Morrisa Klinea povezan s vašim radom i naslućivanjem.

   Sada radite na istoj skici i uporabite sljedeće argumente kako bi se uvjerili u istinitost svoje izvorne pretpostavke:

   Visine bilo kojeg trokuta su konkurentne.

   Pritisnite gumb za prikaz nekih paralela konstruiranih na vašem sketchu.

Za mjerenje nagiba ravnog objekta, odaberite objekt i odaberite **Nagib** iz izbornika Mjerenja.



4. Točku konkurencije (konkurentnu točku) visina trokuta nazivamo *ortocentrom*. Povucite vrhove $\triangle ABC$ dok popunjavate ove praznine:

   Visine $\triangle ABC$ su _____, _____ i _____.

   $\overline{GI}$ je paralelna s _____,

   $\overline{IH}$ je paralelna s _____ i

   $\overline{GH}$ je paralelna s _____.

5. Što možete reći o četverokutu $GBCA$? Kakav je to četverokut? Zašto?

6. Na temelju 5. pitanja, možete li nešto reći o $\overline{GA}$ i $\overline{BC}$?

7. Što možete reći o četverokutu $ABCI$? Kakav je to četverokut? Zašto?

8. Na temelju 7. pitanja, možete li nešto reći o $\overline{AI}$ i $\overline{BC}$?

9. Na temelju 6. i 8. pitanja, možete li nešto reći o $\overline{GA}$ i $\overline{AI}$?

10. Što možete reći o kutovima $\angle GAE$ i $\angle IAE$? Zašto?

11. Objasnite zašto izvorna konstrukcija jamči vaše promatranje iz 10. pitanja.

12. Koje je vrste pravac AE u odnosu na $\overline{GI}$?

13. Možete li reći isto za pravac BF s obzirom na $\overline{GH}$ i za pravac CD s obzirom na $\overline{HI}$?

14. Na temelju 12. i 13. pitanja, možete li nešto zaključiti o pravcima AE, BF, i CD? Zašto?

Prezentirajte vaš dokaz

Objedinite svoj dokaz na pitanjima 5. - 14. Svoj dokaz možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

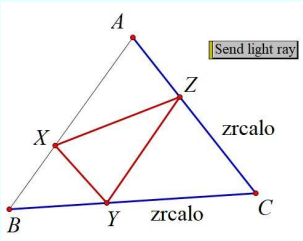
Ako želite, prodiskutirajte svoj dokaz u paru ili grupi.

Zraka svjetlosti u trokutu

Iako je ovaj problem čisto geometrijski, bit će lakše ako ga protumačite kao problem u fizici. Zamislite da sjedite u trokutastoj sobi ABC u kojoj su zidovi $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ zrcala (slično sjedenju unutar kaleidoskopa).

Svjetlosna zraka lasera poslana je iz točke X na stranici $\overline{AB}$ prema stranici $\overline{BC}$ pa se reflektira iz Y na stranici $\overline{BC}$ prema stranici $\overline{AC}$ i reflektira se iz točke Z na stranici $\overline{AC}$ i natrag u točku X.

Gdje bi svjetlosna zraka trebala početi i gdje bi trebala udariti u svaki zid kako bi slijedila najkraći mogući put?



NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Zraka svjetlosti.gsp`

Pritisnite gumb za slanje svjetlosne zrake unutar trokuta.

Pritisnite gumbe za prikaz mjera kutova $\angle XYB, \angle ZYC, \angle YZC, \angle XZA, \angle AXZ$ i $\angle BXY$.

1. Što primjećujete kod ovih mjera kutova? Provjerite svoje opažanje povlačenjem točke X.

2. Objasnite svoje zapažanje iz 1. pitanja koristeći ono što znate o svjetlosnoj zraci.

   Povucite točku X duž $\overline{AB}$ dok opseg XYZ ne bude minimalan.

   Pritisnite gumb za prikaz svake od tri visine i njihova nožišta.

3. Što primjećujete o položajima točaka X, Y i Z u odnosu na nožišta visina?

   Povucite bilo koji vrh $\triangle ABC$ na novi položaj, tako da trokut bude šiljastokutan.

   Ponovno povucite X dok opseg XYZ ne bude minimalan i provjerite svoje zapažanje u 3. pitanju.

   Ponovite prethodni korak barem još jednom.

4. Na temelju 1. i 3. pitanja, možete li nešto naslutiti o parovima kutova u nožištu visina, poput $\angle DFA$ i $\angle EFC$, $\angle FDA$ i $\angle EDB$ te $\angle DEB$ i $\angle FEC$?

Provjerite svoju pretpostavku u 4. pitanju pritiskom na gumb da biste prikazali mjere kutova u nožištima visina.

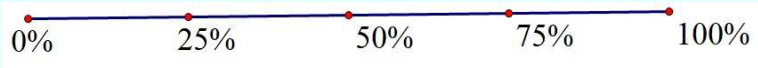
5. Je li vaša pretpostavka u 4. pitanju također istinita ako je $\triangle ABC$ tupokutan?

6. **Sigurnost**:

   Pogledajte svoje zapažanje u 3. pitanju kao i pretpostavku u 4. pitanju, pa odgovorite: koliko ste sigurni da je svaka pretpostavka uvijek istina? Možete li pružiti uvjerljive dokaze ili protuprimjere za potvrditi svoju tvrdnju? Označite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

   Pretpostavka u 3. pitanju:

   Pretpostavka u 4. pitanju:



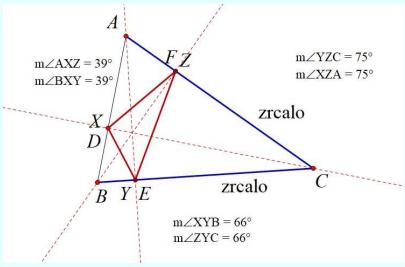
IZAZOV

Ako vjerujete da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera kojima ćete ilustrirati vaš stav i pokušati uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate u svoje ili partnerovo naslućivanje da nisu uvijek istinita, pokušajte za to navesti protuprimjere.

DOKAZIVANJE

Vjerojatno ste došli do ova dva naslućivanja:

- U šiljastokutnom trokutu ABC, upisani trokut XYZ ima minimalni opseg kada se njegovi vrhovi podudaraju s nožištima visina.
- Parovi kutova koji su uz nožišta visina trokuta ABC jednaki su (na primjer, $m\angle DFA = m\angle EFC, m\angle FDA = m\angle EDB$, i $m\angle DEB = m\angle FEC$).



Ali koliko ste sigurni? Kao što ste mogli vidjeti u nekim ranijim iskustvima, moguće je donijeti pogrješne zaključke samo iz opažanja. Primjerice, naslućivanja padaju u vodu ili naslućivanja propadaju ako se uzmu u obzir ekstremni slučajevi. Kako možete provjeriti da ste uzeli u obzir sve slučajeve?

Pregledajte donje argumente kako biste se uvjerili u istinitost vašeg naslućivanja. Prvo ćete dokazati drugo naslućivanje.

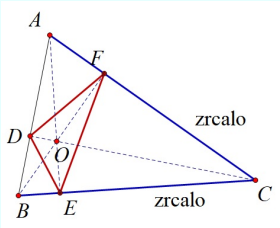
DOKAZIVANJE JEDNAKOSTI KUTNIH MJERA

Za konstrukciju sjecišta, odaberite dva pravca i odaberite **Presjek** u izborniku Konstrukcije. Da biste promijenili oznaku, dvaput kliknite na oznaku Alatom za tekst.

Konstruirajte sjecište visina i označite presjek s O.

7. Možete li nešto reći o kutovima OEC i OFC četverokuta $OECF$? Zašto?

8. Pomoću 7. pitanja objasnite zašto je $OECF$ tetivni četverokut (odnosno četverokut kojemu se može opisati kružnica).



9. Na temelju 8. pitanja, možete li nešto zaključiti o $\angle EOC$ i $\angle EFC$?

10. Što možete reći o kutovima o $\angle ADO$ i $\angle AFO$ četverokuta $ADOF$? Dakle, kojoj vrsti četverokuta pripada četverokut $ADOF$? (Ako želite, provjerite svoj zaključak konstrukcijom u Sketchpadu.)

11. Na temelju 10. pitanja, možete li nešto zaključiti o $\angle AFD$ i $\angle AOD$?

12. Što možete reći o $\angle EOC$ i $\angle AOD$? Zašto?

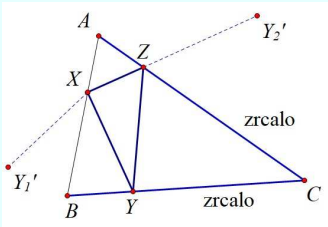
13. Što, dakle, možete zaključiti iz pitanja 9., 11. i 12.?

14. Objasnite kako isti argument vrijedi za parove kutova na druge dvije visine.

DOKAZIVANJE MINIMALNOG OPSEGA

Sada ćete dokazati svoje prvo naslućivanje.

Ponovno pročitajte svoje prvo naslućivanje, a zatim radite pažljivo prema koracima koji slijede.



- Pritisnite tipke za skrivanje visina i svih mjera kutova.
- Zrcalite Y preko $\overline{AB}$. Nazovite ovu točku Y_1'.
- Zrcalite Y preko $\overline{AC}$. Nazovite ovu točku Y_2'.
- Konstruirajte $\overline{Y_1'X}$ i $\overline{Y_2'X}$.

15. Što sada možete reći o $\overline{XY_1'}$ i $\overline{XY}$, te $\overline{Y_2'Z}$ i $\overline{ZY}$? Zašto?
16. Na temelju 15. pitanja, možete li nešto reći o duljini staze $|XY| + |YZ| + |ZX|$ i puta $|XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$?
17. Što primjećujete kod točaka X, Z i Y_2'? Pokušajte objasniti (dokazati) svoje zapažanje.
18. Povucite X tako da je duljina staze $|XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$ minimalna. Objasnite gdje je mjesto točke X.
19. Pokažite (dokažite) da ako konstrukcija zadovoljava uvjete iz 18. pitanja, tada je $m\angle AXZ = m\angle BXY$.
20. Na temelju pitanja 19. i iz rezultata u prvom odjeljku dokazivanja ove aktivnosti, možete li nešto zaključiti o položaju $\triangle XYZ$ kako bi njegov opseg bio minimalan?

Povijesna bilješka: Problem upisanog trokuta s najmanjim opsegom u šiljastokutnom trokutu prvi je predložio **Hermann Schwarz** (1843. - 1921.), profesor na Göttingenu u Berlinu, Njemačka i jedan je od najistaknutijih istraživača varijacijskog računa u devetnaestom stoljeću.

Prezentirajte vaš dokaz

Prezentirajte jedan ili oba svoja dokaza. Vaše dokaze možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom. Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

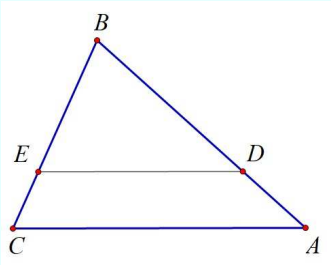
Daljnje istraživanje

Sketchom svjetlosnih zraka provjerite slučajeve u kojima je $\triangle ABC$ pravokutan ili tupokutan.

Gdje biste trebali postaviti $\triangle XYZ$ kako bi imao minimalni opseg? Pokušajte objasniti svoje rješenje.

Usporedni pravci

NASLUĆIVANJE



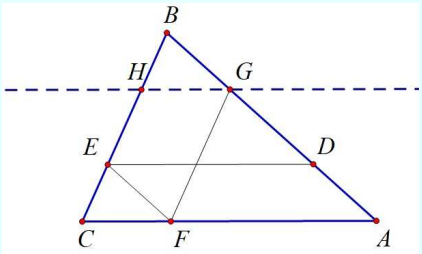
Otvorite datoteku `Paralela.gsp`. Povucite različite točke u svom sketchu.

Uočite da je točka D slobodna točka na dužini $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$.

Pritisnite gumb koji crta dužinu od točke D.

1. Povucite točku D, a zatim nadopunite ovu izjavu:
   $\overline{ED}$ _____ $\overline{CA}$.
   Pritisnite gumb koji crta dužinu od točke E.
2. Ponovno povucite točku D, a zatim nadopunite ovu izjavu:
   $\overline{EF}$ _____ $\overline{BA}$.
   Pritisnite gumb koji crta dužinu od točke F.
3. Ponovno povucite točku D, a zatim nadopunite ovu izjavu:
   $\overline{FG}$ _____ $\overline{BC}$.
4. Pazite da se točke D i G ne preklapaju. Mislite li da se možete vratiti u početnu točku D, ako nastavite povlačenjem paralelnih dužina sa stranicama?
   Ako mislite da se ne možete vratili u početnu točku D, objasnite zašto ne? Ako mislite da možete, pod kojim uvjetima i nakon crtanja koliko paralelnih dužina?

Da biste konstruirali svoj prvi paralelni pravac, odaberite točku G, zatim $\overline{AC}$ i odaberite **Paralela** u izborniku Konstrukcije.



Konstruirajte barem još tri paralelna pravca koji nastavljaju obrazac prvih triju dužina.

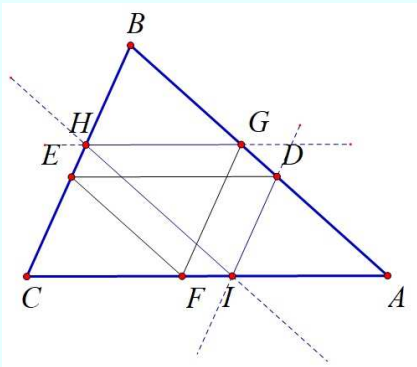
5. Što primjećujete? Povlačite točku D i bilo koji od vrhova $\triangle ABC$ kako biste provjerili vaše zapažanje.

6. Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Naznačite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

IZAZOV

Ako vjerujete da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera kojima ćete podržati vaš stav i pokušati uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičkim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte za to navesti protuprimjere.

DOKAZIVANJE



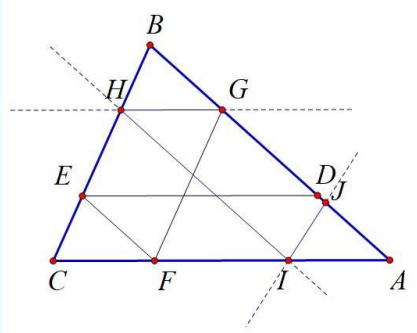
Trebali ste primijetiti da kad konstruirate paralelne pravce kako je opisano, morate ići dva puta (konstruirajući ukupno šest paralelnih pravaca) prije nego što se vratite u početnu točku D. (Kad je D u polovištu $\overline{AB}$, potrebno je obići samo jednom, konstruirajući tri paralelna pravca.) Većini ljudi ovo je iznenađujuće jer zamišljaju da se u nekim slučajevima neće vratiti na početak. Kako možemo provjeriti da je to *uvijek* istinito?

Pritisnite gumb za prikaz omjera $\dfrac{|BD|}{|DA|}$ i $\dfrac{|BE|}{|EC|}$.

7. Povucite točku D i bilo koji vrh $\triangle ABC$ da biste uočili pravilnost.

   Što primjećujete za ove omjere? Ovo će pokazati pravilnost u trokutu koju ste možda već dokazali ili otkrili.

   U ostatku dokaza koristit ćete svoje rezultate iz 7. pitanja.



Za nastavak dokazivanja vašeg naslćivanja iz 5. pitanja, možete koristiti oblik dokazivanja koji se naziva *dokaz kontradikcijom*. Za korištenje dokaza kontradikcijom, počnite s pretpostavkom da je vaš zaključak lažan. Onda pokažite da to dovodi do kontradikcije. U ovoj aktivnosti, pretpostavite da se ne vraćate u točku D nakon konstrukcije šest paralela. Umjesto toga pretpostavite da ćete se vratiti u neku drugu točku J, kao na slici.

Inače, slika odgovara vašoj dosadašnjoj konstrukciji: $\overline{DE} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}, \overline{FG} \parallel \overline{IJ} \parallel \overline{CB}$ i $\overline{FE} \parallel \overline{IH} \parallel \overline{AB}$. Dalje logički pokazujete da se J *mora* podudarati s D.

Prvo pokušajte sami, ali ako ne uspijete, pročitajte i prođite kroz sljedeće korake mogućeg dokaza.

8. U nizu jednakosti koje slijede uporabite rezultat iz 7. pitanja koji se odnosi na sve omjere na koje su stranice podijeljene točkama D, E, F, G, H, I i J.

   $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AF|}{|FC|} =$ _____

9. Što vaše jednokosti govore o $\frac{|AD|}{|DB|}$ i $\frac{|AJ|}{|JB|}$? Što možeš zaključiti iz ovoga?

Prezentirajte vaš dokaz

Objedinite svoja objašnjenja na pitanja 7. - 9. Svoj dokaz možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

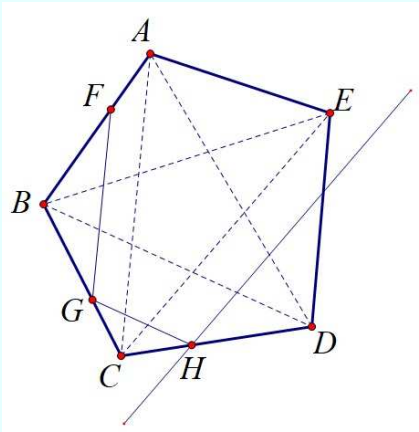
Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

1. Što se događa ako jedna ili više točaka D povezane s I padaju na nastavke dužina $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$? Vrijedi li još uvijek vaš rezultat?

2. Što se događa ako se u peterokutu $ABCDE$ dužina $\overline{FG}$ crta paralelno s dužinom $\overline{AC}$ iz točke F na $\overline{AB}$, dužina $\overline{GH}$ paralelno s $\overline{BD}$ i tako dalje? Možemo li se vratiti u točku F? Dokažite svoje opažanje.

3. Generalizirajte svoja zapažanje u 2. pitanju za poligone sa sličnim svojstvom.



5. Dokaz kao izazov

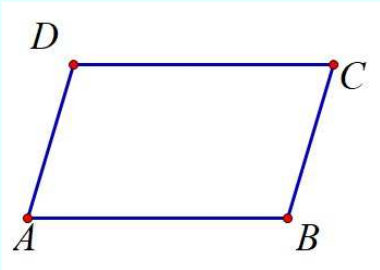
Johan Gielis u radu s nastavnicima u Hrvatskoj

Simetrale kutova paralelograma

U ovoj aktivnosti istražit ćete vrstu četverokuta kojeg određuju simetrale kutova paralelograma.

NASLUĆIVANJE

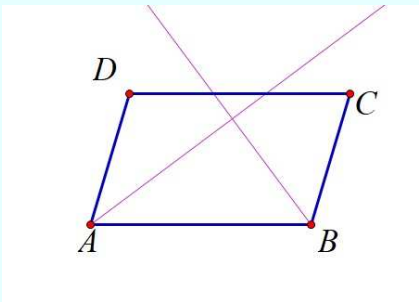
Otvorite datoteku `Paralelogram.gsp`



1. Povucite različite vrhove svog četverokuta $ABCD$. Koje značajke četverokuta $ABCD$ treba provjeriti kako biste utvrdili je li to paralelogram? Razmotrite mjerenja ako želite.

   Pritisnite gumbe koji prikazuju svaku od četiri simetrale kutova paralelograma $ABCD$.

   Pritisnite gumb koji prikazuje četverokut određen presjecima simetrala kutova.



2. Povucite različite vrhove četverokuta $ABCD$. Koje je vrste četverokut $EFGH$? (Izmjerite mu kutove ako je potrebno.)

3. Pokušajte povući vrhove četverokuta $ABCD$ tako da stranice četverokuta $EFGH$ budu jednake. Što ste otkrili?

4. Što se događa s četverokutom $EFGH$ kad je četverokut $ABCD$ kvadrat?

5. Što možete reći o četverokutu $EFGH$ ako je četverokut $ABCD$ romb?

IZAZOV

Dokažite svoje pretpostavke iz navedenih pitanja 2. - 5.

DOKAZIVANJE

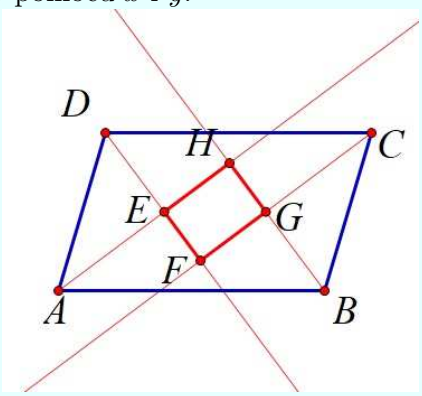
U prethodnom smo odlomku konstruirali simetrale kutova paralelograma i njihova sjecišta koja su odredili četverokut $EFGH$. Trebali ste otkriti da je:

- četverokut $EFGH$ uvijek pravokutnik.
  (Ponekad je četverokut $EFGH$ kvadrat koji je poseban slučaj pravokutnika, a ponekad je četverokut $EFGH$ točka koju možete zamisliti kao pravokutnik sa stranicama duljine 0.)
- četverokut $EFGH$ kvadrat samo ako je četverokut $ABCD$ pravokutnik.
  Međutim, kada je $ABCD$ kvadrat ili romb, simetrale kutova se sijeku u jednoj točki.

Upute koje slijede pomoći će vam u dokazivanju ovih zapažanja.

DOKAZIVANJE DA JE $EFGH$ PRAVOKUTNIK

6. Neka je $m\angle DAB = 2x$ i $m\angle ABC = 2y$.
   Izrazi $m\angle AHG$ pomoću x i y.



7. Što možete reći o zbroju mjera kutova $\angle DAB$ i $\angle ABC$? Zašto?

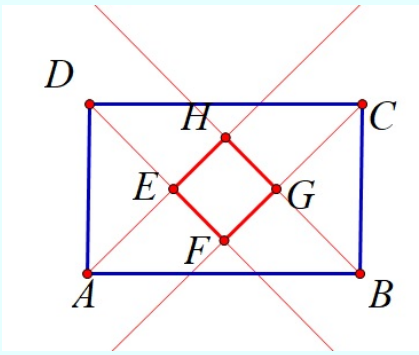
8. Zapišite svoje zapažanje iz 7. pitanja kao izraz pomoću x i y i pojednostavnite ga.

9. Kako je pitanje 8. povezano s pitanjem 6.? Što vam ovo govori o $m\angle AHG$?

10. Objasnite vrijedi li isti argument za ostale kutove četverokuta $EFGH$.

DOKAZIVANJE DA JE $EFGH$ KVADRAT KAD JE $ABCD$ PRAVOKUTNIK

11. Ako je $ABCD$ pravokutnik, što možete reći o $\overline{FD}$ i $\overline{FC}$? Zašto?
12. Što možete reći o trokutima $\triangle DAE$ i $\triangle CBG$? Zašto?



13. Što to znači u vezi s $\overline{ED}$ i $\overline{GC}$?
14. Na temelju pitanja 11. - 13., što, dakle, možete reći o $\overline{FE}$ i $\overline{FG}$? Zašto?
15. Što vam ovo govori o $EFGH$?

Daljnje istraživanje

1. Objasnite zašto je pravokutnik $EFGH$ točka samo ako je četverokut $ABCD$ romb.
2. U novom sketchu/crtežu konstruirajte simetrale kutova bilo kojeg četverokuta i istražite vrstu četverokuta kojeg određuju njihova sjecišta. Dokažite svoja zapažanja.

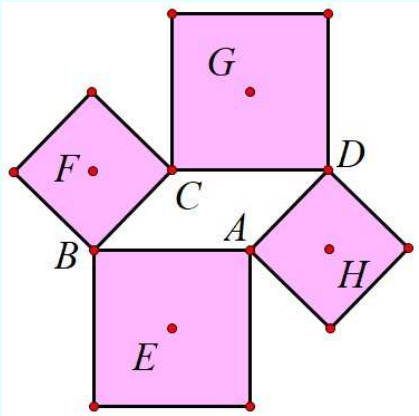
Kvadrati na paralelogramu

U ovoj aktivnosti istražit ćete vrstu četverokuta kojeg tvore spojnice točaka E, F, G i H u ovdje prikazanoj konstrukciji. Konstrukcija sadrži posebne četverokute.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Kvadrati na paralelogramu.gsp`. Povlačite točke u sketchu kako biste se upoznali s ovom konstrukcijom.

1. Opišite četiri obojana četverokuta.



2. Opišite četverokut $ABCD$.

   Za konstrukciju četverokuta $EFGH$ uporabite alat **Dužina**.

3. Povucite bilo koju točku A, B, C i D.

   Kakav je četverokut $EFGH$? Izmjerite neke kutove i stranice kako biste provjerili svoju pretpostavku.

4. Povucite A tako da je $\overline{AD}$ paralelna s $\overline{AB}$. Vrijedi li još uvijek vaše naslućivanje iz 3. pitanja?

5. Povucite A preko $\overline{CD}$ tako da se obojani četverokuti preklapaju. Vrijedi li još uvijek vaše naslućivanje iz 3. pitanja?

IZAZOV

Dokažite svoje naslućivanje iz 3. pitanja.

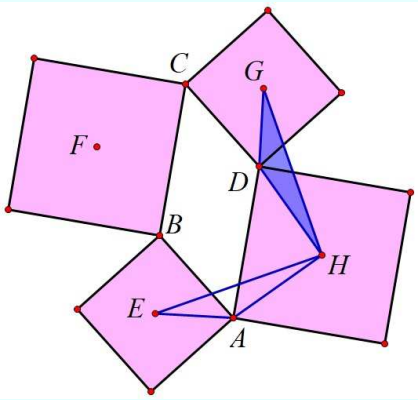
Daljnje istraživanje

Uočili ste da je četverokut $EFGH$ uvijek kvadrat, ali možda još ne možete objasniti *zašto* je to istina. Ovaj odjeljak će vam pomoći dodatno istražiti problem kako biste došli do dokaza.

Pritisnite gumb *Poluokret*.

6. Što primjećujete kod izvorne konstrukcije? Opišite simetriju. Budući da četverokut $EFGH$ ima istu simetriju, što možete zaključiti o tome?

   Pritisnite gumb koji prikazuje trokute $\triangle HAE$ i $\triangle HDG$.



Pažljivo odaberite površinu (unutrašnjost) i odaberite **Rotirajte** u izborniku Transformacije. Upišite broj stupnjeve za koje želite rotirati i potvrdite s OK.

7. Što primjećujete kod ova dva trokuta?

   Povucite točke i izvršite mjerenja kako biste to eksperimentalno istražili. Zatim pokušajte logički objasniti svoje opažanje.

   Dvaput kliknite na točku H da biste je označili kao središte rotacije. Zatim rotirajte unutrašnjost $\triangle HDG$ tako da padne unutar $\triangle HAE$.

8. Za koju veličinu kuta treba rotirati $\triangle HDG$ oko središte H u $\triangle HAE$?

9. Što sada možete zaključiti u vezi s $\angle EHG$ i, sukladno tome, o $EFGH$?

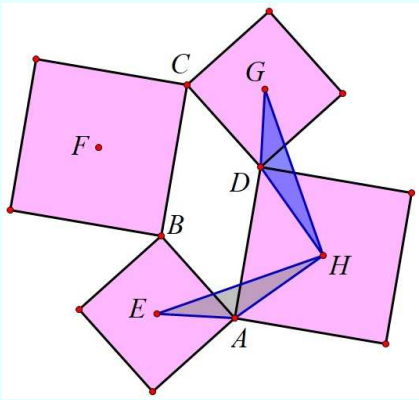
IZAZOV

Pokušajte iskoristiti svoja zapažanja iz pitanja 6. - 9. u dokazivanju da je četverokut $EFGH$ kvadrat. Razgovarajte o svojim zapažanjima u paru ili grupi. Ako ne uspijete, pročitajte savjete koji slijede.

DOKAZIVANJE

Razvoj logičkog argumenta kojim se brani matematički rezultat često se percipira kao intelektualni izazov matematičara. Ovo je vaša prilika da se suočite s tim izazovom.

Slijedite korake u nastavku za izradu dokaza vašeg originalnog naslućivanja.



10. Objasnite odnos između $\angle HAE$ i $\angle BAD$.
(*Savjet*: Povucite točku B dok $\overline{AB}$ ne postane paralelno s $\overline{AD}$.)

11. Objasnite odnos između $\angle BAD$ i $\angle ADC$.

12. Opišite $\angle HDG$ u odnosu na $\angle BAD$.
(*Savjet*: Pogledajte kutove oko točke D.)

13. Što možete zaključiti na temelju 11. i 12. pitanja?

14. Što možete reći o odgovarajućim stranicama $\overline{EA}$ i $\overline{GD}$ trokuta $\triangle HAE$ i $\triangle HDG$? Zašto?

15. Što možete reći o odgovarajućim stranicama $\overline{AH}$ i $\overline{DH}$? Zašto?

16. Na temelju pitanja 13. - 15., možete li štogod zaključiti o trokutima $\triangle HAE$ i $\triangle HDG$, a prema tome i o odgovarajućim stranicama $\overline{HE}$ i $\overline{HG}$?

17. Što možete zaključiti o četverokutu $EFGH$ u ovom trenutku?

18. Što možete reći o $\angle AHD$? Zašto?

19. Što, dakle, možete reći o $\angle EHG$? Zašto?

20. Što sada možete zaključiti o četverokutu $EFGH$? Zašto?

Predložite svoj dokaz

Pregledajte pitanja 6. i 10. - 20. Sada napišite vlastitim riječima dokaz o svojem naslućivanju. Možete uključiti demonstracijsku skicu/sketch kojim ćete podržati i objasniti svoj dokaz.

Daljnje istraživanje

1. U 5. pitanju vidjeli ste da ako su kvadrati položeni prema unutra i preklapaju se (umjesto da su položeni prema vani), rezultat i dalje vrijedi. Možete li prilagoditi vaš dokaz za ovaj slučaj?

2. Koju vrstu četverokuta određuju središta kvadrata konstruiranih nad stranicama jednakokračnog trapeza? Možete li objasniti svoje zapažanje?

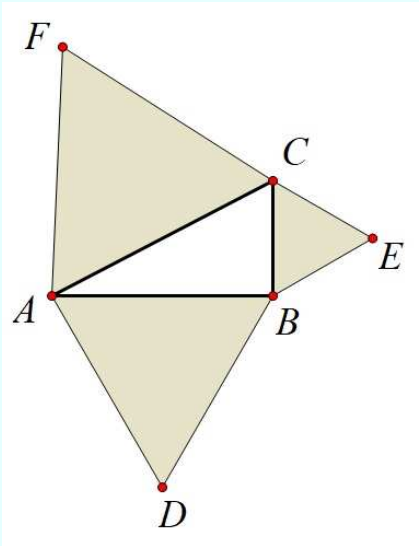
3. Koju vrstu četverokuta određuju središta kvadrata konstruiranih nad stranicama deltoida?

Točka Fermat-Torricelli

U ovoj ćete aktivnosti izvesti i dokazati neke tvrdnje o pravokutnom trokutu.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Fermat 1.gsp`. Povlačite bilo koji vrh kako biste istražili oblike u sketchu.



1. Kakvi su trokuti konstruirani nad stranicama pravokutnog trokuta $\triangle ABC$?

   Konstruirajte pravce DC, EA i FB.

2. Što primjećujete kod ovih pravaca?

   Povucite bilo koji vrh $\triangle ABC$ kako biste provjerili svoje opažanje.

   Izmjerite udaljenosti $|DC|, |EA|$ i $|FB|$.

3. Što primjećujete o tim udaljenostima? Pažljivo provjerite svoje opažanje daljnjim povlačenjem.

4. Povucite C pored B. Što se događa s trokutima?

5. Kad povučete C mimo B, vrijedi li i dalje vaše zapažanje na temelju pitanja 2. i 3.?

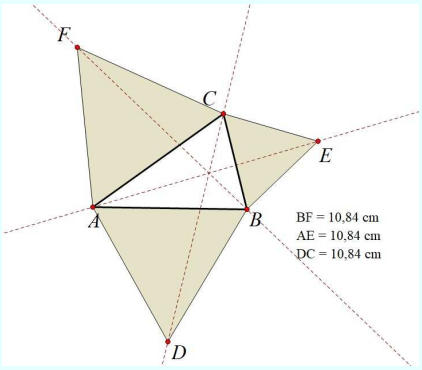
Za mjerenje udaljenosti dviju točaka, odaberite obje točke i odaberite **Udaljenost** iz izbornika Mjerenje.

IZAZOV Dokažite svoje naslućivanje iz pitanja 2., 3. i 5.

PROVJERAVANJE

Možda, međutim, postoji još jedan svrha dokazivanja - nešto kao podloga za izdržljivost i domišljatost matematičara. Divimo se osvajaču Everesta, ne zato što je vrh Everesta mjesto na kojem želimo biti, već i zato što je tako teško stići tamo.

- Davis i Hersh, 1983



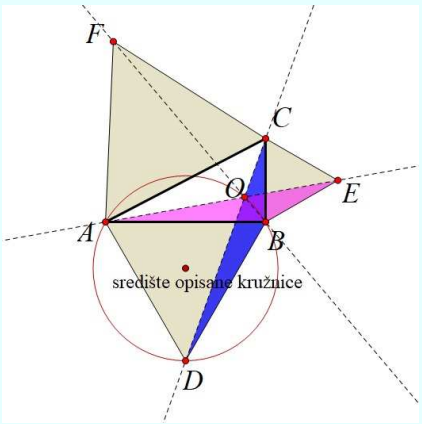
Primijetili ste da, ako su jednakostranični trokuti $\triangle DBA, \triangle ECB$ i $\triangle FAC$ konstruirani nad stranicama bilo kojeg pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, onda vrijedi

- Pravci DC, EA i FB su konkurentni,
- Dužine $\overline{DC}, \overline{EA}$ i $\overline{FB}$ jednakih su duljina.

Štoviše, čini se da je ovaj rezultat istinit čak i ako su trokuti konstruirani prema unutra.

Ova konkurentna točka poznata je kao Fermat-Torricellijeva točka. (Matematičari **Pierre de Fermat** i **Evangelista Torricelli** to su otkrili neovisno jedan o drugom.)

No, kako znamo da su naša naslućivanja doista istinita? Kao što ste mogli vidjeti u aktivnosti **Konkurentnost**, moramo biti oprezni kad donosimo zaključke. Hajdemo dalje istražiti problem kako bismo došli do nekih ideja za dokaz.



Pritisnite gumb koji prikazuje unutrašnjost $\triangle DBC$.

Pritisnite gumb koji rotira unutrašnjost $\triangle DBC$ oko točke B za $60°$.

Kako biste konstruirali točku presjeka triju pravaca, odaberite dva među njima te odaberite **Presjek** iz izbornika Konstrukcija

6. Što primjećujete kod rotiranog trokuta? Pokušajte pronaći druge parove trokuta.

   Konstruirajte konkurentnu točku i označite je s O.

   Zatim izmjerite šest kutova formiranih oko točke O.

7. Što primjećujete kod šest kutova oko O? Povucite vrh trokuta $\triangle ABC$ kako biste provjerili vaša zapažanja.

   Pokažite opisanu kružnicu trokutu $\triangle ADB$.

8. Kakav odnos postoji između $\angle AOB$ i $\angle ADB$? Što možete zaključiti iz toga? (*Savjet*: Pogledajte četverokut $AOBD$.)

9. Pritisnite gumb koji prikazuje sve opisane kružnice i središta opisanih kružnica jednakostraničnim trokutima. Pogledajte druga dva trokuta. Što primjećujete?

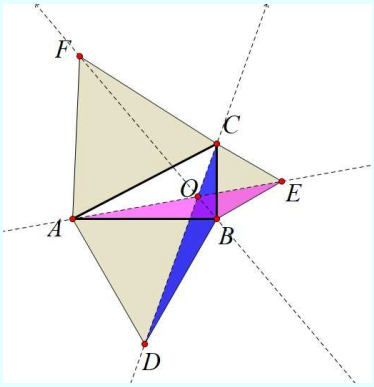
IZAZOV

Pokušajte uporabiti svoja zapažanja iz pitanja 6. - 9. za konstruiranje dokaza da vrijedi $|AE| = |BF| = |DC|$ kao i to da su pravci AE, BF i DC konkurentni. Razgovarajte o svojim tvrdnjama u paru ili grupi. Ako ne uspijete, pročitajte savjete koji slijede.

DOKAZIVANJE JEDNAKOSTI DUŽINA

Evo nekoliko savjeta za planiranje mogućeg dokaza ove pretpostavke:

Ako su jednakostranični trokuti $\triangle DBA, \triangle ECB$ i $\triangle FAC$ konstruirani nad stranicama bilo kojeg pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, tada su duljine $|DC|, |EA|$ i $|FB|$ jednake.



Pomoći će vam ako sakrijete opisane kružnice i njihova središta.

Ne morate skrivati trokute $\triangle DBC$ i $\triangle ABE$, ali zapamtite da nisu dio izvorne konstrukcije.

10. U trokutima $\triangle DBC$ i $\triangle ABE$, što možete reći o odgovarajućim stranicama $\overline{DB}$ i $\overline{AB}$? Zašto?

11. Što možete reći o odgovarajućim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{BE}$? Zašto?

12. Što možete reći o odgovarajućim kutovima $\angle DBC$ i $\angle ABE$? Zašto?

13. Što, dakle, možete zaključiti o trokutima $\triangle DBC$ i $\triangle ABE$?

14. Na temelju 13. pitanja, možete li nešto zaključiti o stranicama $\overline{DC}$ i $\overline{AE}$?

15. Ponovite gore navedeno za trokute $\triangle EAC$ i $\triangle BFC$ kako biste dovršili dokaz.

16. Jeste li u odgovorima na bilo koje od 10. - 15. pitanja koristili činjenicu da je mjera $\angle ABC$ jednaka $90°$? Što to implicira o vašem upravo dokazanom naslućivanju?

17. Razmotrite dolje navedeni citat u odnosu na vaš zaključak u 16. pitanju.

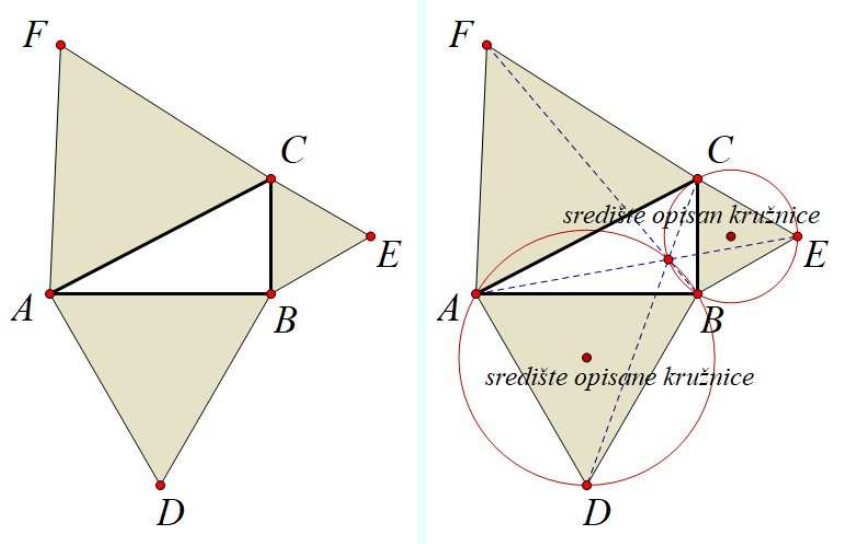
Dobar dokaz trebao bi dati točan uvid zašto je tvrdnja istinita. Takav uvid ponekad otkriva ugodno, neočekivano iznenađenje da je tvrdnja samo poseban slučaju općenitije, čime se omogućuje njezino neposredno poopćavanje. *- M. D. de Villiers, 1998*

Na koji način vam je vaš dokaz pružio uvid koji je doveo do neposredne generalizacije?

DOKAZIVANJE KONKURENTNOSTI PRAVACA

Evo nekoliko savjeta za planiranje mogućeg dokaza vašeg drugog naslućivanja:

Ako su jednakostranični trokuti $\triangle DBA, \triangle ECB$ i $\triangle FAC$ konstruirani nad stranicama bilo kojeg pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, pravci DC, EA i FB su konkurentni.

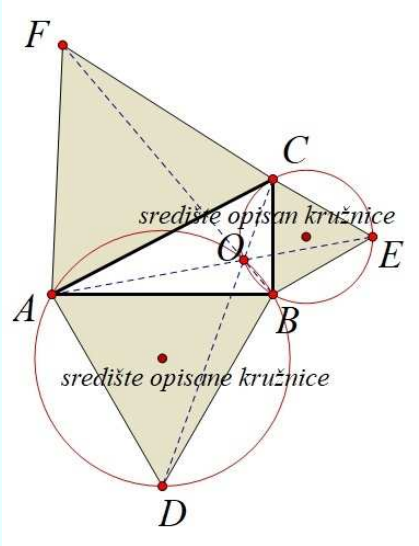


- Sakrijte točku O i pravce BF, DC i AE.
- Pritisnite gumb koji skriva trokute $\triangle DBC$ i $\triangle ABE$.
- Pritisnite gumb koji prikazuje opisane kružnice ADB i BEC. One bi se trebale sjeći u točki B.
- Konstruirajte drugu točku sjecišta ovih dviju kružnica. Ovo će biti vaša nova točka O.
- Pomoću alata **Dužina** konstruirajte šest dužina $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}$ i $\overline{OF}$.

Prvo ćemo dokazati da su AOE i DOC pravci, a zatim da opisana kružnica trokutu $\triangle AFC$ također prolazi točkom O. Koristeći ovu činjenicu, pokazat ćemo da je BOF također pravac, što implicira da

su pravci AE, DC i BF konkurentni u O.
(*Napomena*: *Ne možemo* pretpostaviti da su crte AOE, DOC i BOF pravci jer to moramo dokazati.)

18. Što možete reći o mjeri kuta $\angle BCE$? Zašto?



19. Na temelju pitanja 18., što sada možete reći o mjeri kuta $\angle BOE$? Zašto?

20. Što možete reći o mjeri kuta $\angle BOA$? Zašto?

21. Na temelju pitanja 19. i 20., što sada možete zaključiti o kutu $\angle AOE$?

22. Ponovite isti argument kako biste pokazali da točke D, O i C pripadaju istom pravcu, tj. da su kolinearne.

23. Na temelju gore utvrđenih mjera kutova izračunajte mjeru kuta $\angle AOC$.

24. Na temelju 23. pitanja, što sada možete zaključiti o četverokutu $CFAO$? Zašto?

    Pritisnite gumb za prikaz opisane kružnice trokutu $\triangle AFC$ i provjerite svoj rezultat iz pitanja 24.

25. Ponovite isti argument kao u pitanjima 18. - 21. kako biste pokazali da su B, O i F kolinearne.

26. Bi li prethodni argument još uvijek vrijedio da mjera $\angle ABC$ nije $90°$? Što iz toga možete zaključiti?

27. Razmotrite donji citat, ruskog matematičara, u odnosu na vaš zaključak u pitanju 26.

    Dobar je dokaz onaj koji nas čini mudrijima.

    - Yu Manin, 1981.

    Na koji način vas je dokaz učinio "mudrijim"?

    Otvorite datoteku `Fermat 2.gsp` i uporabite je za provjeru zaključaka iz pitanja 24. i 26.

Prezentirajte svoje dokaze

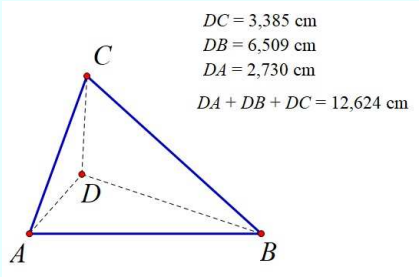
Prezentirajte jednan ili oba dokaza. Vaše dokaze možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom. Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

Možete li pronaći slične ili druge trokute nad stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$ tako da jedan ili oba rezultata i dalje vrijede?

Problem zračne luke

Pretpostavimo da se planira izgradnja zračne luke blizu triju gradova približno jednake veličine. Odlučeno je da se zračna luka izgradi na mjestu za koje je zbroj udaljenosti od tri grada najmanji. Gdje bi se trebala nalaziti zračna luka?



NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Zračna luka.gsp`

Povucite točku D tako da zbroj udaljenosti do triju gradova bude minimalna. Strpljivo pretražujte i logički zaključite.

Koje su mjere kutova $\angle ADC, \angle BDA$ i $\angle CDB$?

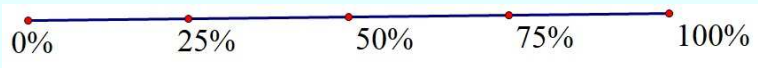
1. Što primjećujete o ta tri kuta?

   Povucite A, B ili C, ali pazite da $\triangle ABC$ ostane šiljastokutan. Ponovno povucite D kako biste dobili optimalnu točku za ovaj novi trokut.

2. Usporedite nova mjerenja kutova $\angle ADC, \angle BDA$ i $\angle CDB$ s onima u pitanju 1. Što primjećujete?

3. Uporabite svoja zapažanja kako biste napisali naslućivanje.

4. **Sigurnost:** Koliko ste sigurni da je vaše naslućivanje uvijek istinito? Zapišite svoju razinu sigurnosti na brojevnom pravcu i objasnite svoj izbor.

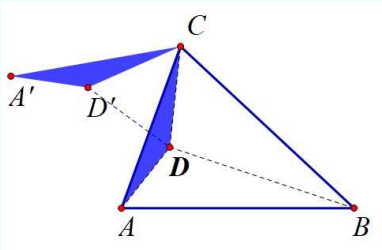


   Ako mislite da je vaše naslućivanje uvijek istinito, navedite nekoliko primjera koji podržavaju vaš stav i pokušajte uvjeriti partnera ili članove svoje skupine. Još bolje, potkrijepite svoje naslućivanje logičkim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjate da vaše ili partnerovo naslućivanje nije uvijek istinito, pokušajte za to navesti protuprimjere.

DOKAZIVANJE

U prethodnom odjeljku trebali ste otkriti da je optimalni položaj, zračne luke u šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$, u točki spojenoj s vrhovima i dužinama koje su pod kutom približno 120°. No, koliko ste sigurni?

Preispitajte dolje navedene argumente kako biste se uvjerili u svoja naslućivanja. Oslonite se na konstrukciju ekvivalentnog problema u kojem je optimalni položaj lakše locirati. Pratite sve u sketchu ako želite.



Povucite D u novu točku unutar $\triangle ABC$.

Pritisnite gumb u sketchu koji rotira $\triangle ADC$ za $-60°$ oko točke C kako biste dobili $\triangle A'D'C$.

5. Na temelju rotacije, možete li nešto zaključiti o duljinama $\overline{CD}$ i $\overline{CD'}$?

6. Koje je vrste trokut $\triangle DCD'$?
(*Savjet*: Uporabite činjenicu da je mjera kuta $\angle D'CD$ jednaka 60° i vaš zaključak u pitanju 5.)

7. Na temelju 6. pitanja, možete li nešto zaključiti o duljinama dužina $\overline{D'D}$ i $\overline{DC}$?

8. Nakon rotiranja, što možete zaključiti o duljinama dužina $\overline{AD}$ i $\overline{A'D'}$? Zašto?

9. Što sada možete zaključiti u vezi s $|AD| + |CD| + |BD|$ i $|A'D'| + |D'D| + |DB|$?

10. Kada će put od A' do B ($|A'D'| + |D'D| + |DB|$) biti minimalan?

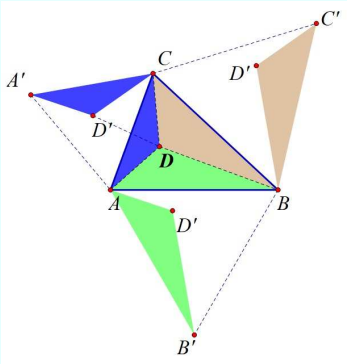
    Povucite D dok vaš sketch ne zadovolji uvjet iz 10. pitanja
    (*Savjet*: Može vam pomoći konstrukcija dužine $\overline{A'B}$.)

11. Kada je uvjet iz 10. pitanja zadovoljen, što možete zaključiti o veličini kuta $\angle A'D'C$ pa prema tome i o veličini kuta $\angle ADC$?

12. Objasnite kako rotiranjem $\triangle CDB$ za $-60°$ možete dokazati da je mjera kuta $\angle CDB$ jednaka 120°.

Gledanje unatrag

Možda ste ranije primijetili da je optimalna točka za zračnu luku Fermat-Torricellijeva točka koju smo raspravljali u prethodnoj aktivnosti. Pokažite da je ova konstrukcija ekvivalentna konstruiranju jednakostraničnih trokuta $A'AC$, $B'BA$ i $C'CB$ nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ (vidi sliku) te konstruiranju dužina $\overline{A'B}$, $\overline{B'C}$ i $\overline{C'A}$ koje se sijeku u točki D.



Povijesne bilješke

Verzije "problema zračne luke" i njihova geometrijska svojstva proučavali su desetci matematičara u posljednjih 300 godina (iako prije 300 godina nisu imali zrakoplove!). **Pierre de Fermat** je prvi postavio problem sličan problemu zračne luke u eseju o optimizaciji. On je htio pronaći točku unutar šiljastokutnog trokuta takvu da je zbroj njezinih udaljenosti od triju vrhova trokuta minimalan. Fermat je rođen 1601. godine, a po zanimanju je bio pravnik. Iako mu je matematika jednostavno bila zanimljiv hobi, dao je važan doprinos teoriji brojeva, analitičkoj geometriji, računu i teoriji vjerojatnosti.

Talijanski matematičar i znanstvenik **Evangelista Torricelli** predložio je konstruiranje jednakostraničnih trokuta nad stranicama bilo kojeg trokuta za lociranje optimalne točke (vidi prethodnu aktivnost Fermat-Torricellijeva točka). Iako je ovo rješenje predloženo 1640., objavio ga je tek 1659. godine **Viviani**, jedan od Torricellijevih učenika. Torricelli je vjerojatno poznatiji po svojim istraživanjima prirode plina, što je dovelo do izuma živinog barometra.

Rješenje opisano u ovoj aktivnosti kreirao je 1929. njemački matematičar **J. Hoffman**. Nekoliko drugih poznatih matematičara, primjerice **C. F. Gauss** i **J. Steiner**, istraživali su problem i iznijeli neke zanimljive generalizacije.

Daljnje istraživanje

1. Dinamički sketch triju gradova kreiran Sketchpadom primjer je matematičkog modela koji se može koristiti za predstavljanje i anali-

zu situacije u stvarnom svijetu. Međutim, situacije u stvarnom svijetu iznimno su složene i obično se moraju pojednostavniti prije nego što se matematika može smisleno primijeniti na njih. Koje pretpostavke se mogu razmotriti kako bi se pojednostavnio izvorni problem?

2. Možete li povezati problem zračne luke s otkrivenim i dokazanim rezultatom u aktivnosti **Udaljenosti u jednakostraničnom trokutu** i iskoristiti ga za razvoj svojevrsnog neizravnog (indirektnog) dokaza za optimalan smještaj zračne luke? (Koristite datoteku `Zračna luka 2.gsp` za istraživanje odnosa.)

3. Gdje treba postaviti zračnu luku ako su gradovi smješteni u vrhovima tupokutnog trokuta, s kutom većim od 120°?

4. Gdje treba postaviti zračnu luku ako sva tri grada pripadaju istom pravcu (tj. kolinearni su)? Možete li generalizirati?

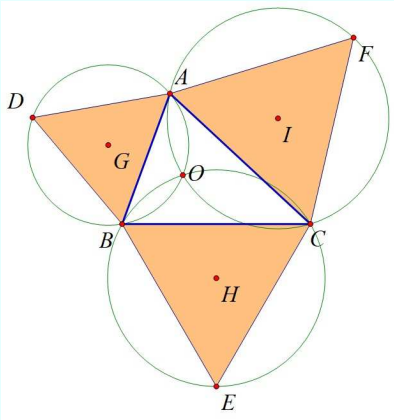
5. Gdje treba postaviti zračnu luku ako su svi gradovi različite veličine, na primjer, ako gradovi A, B i C imaju $60.000, 100.000$ i 70.000 ljudi?

6. Gdje treba postaviti zračnu luku ako postoje četiri grada umjesto samo tri? (Za istraživanje problema uporabite datoteku `Zračna luka 5.gsp`.) Vrijedi li vaše rješenje i ako su četiri grada smještena u vrhovima konkavnog četverokuta?

7. Gdje treba izgraditi svemirsku luku za četiri planeta koja su smještena u vrhovima tetraedra tako da je ukupni zbroj udaljenosti od svemirske luke do planeta minimalan?

Napoleonov problem

Ako konstruirate jednakostranične trokute nad stranicama bilo kojeg trokuta, dobivate neke zanimljive rezultate. Možda ste već otkrili neke od ovih ako ste prošli prethodnu aktivnost određivanja **Fermat-Torricellijeve točke**. Jedan rezultat tih aktivnosti je da su tri opisane kružnice jednakostraničnim trokutima uvijek konkurentne, tj. imaju konkurentnu točku koja se zove *Fermat-Torricellijevom točkom*. Ova je točka na slici označena s O.



U ovoj ćete aktivnosti otkriti još jedan rezultat vezano uz ovu konstrukciju, a pripisuje se **Napoleonu Bonaparteu**, francuskom caru i generalu. Napoleon je jako uživao u geometriji i očito je otkrio i dokazao ovo sljedeće naslućivanje.

NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Napoleon.gsp` Povucite različite točke u sketchu kako biste upoznali konstrukciju.

Pomoću alata **Dužina** konstruirajte trokut s vrhovima G, H i I.

1. Povucite bilo koji vrh $\triangle ABC$. Što primjećujete o $\triangle GHI$?
   Mjerite ako je potrebno i povucite još neke vrhove kako biste potvrdili svoje naslućivanje.

2. Provjerite svoje naslućivanje iz 1. pitanja za sljedeće posebne slučajeve:

   - Trokut $\triangle ABC$ je tupokutan.
   - Točke A, B i C pripadaju istom pravcu.
   - Jednakostranični trokuti nad stranicama su prema unutra i preklapaju se.

   Zapišite svoja zapažanja.

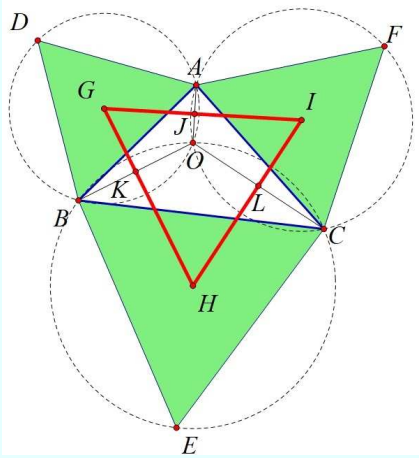
IZAZOV

Pokušajte dokazati svoje naslućivanje iz 1. pitanja.
(*Savjeti*: (1) Konstruirajte $\overline{AO}, \overline{BO}$ i $\overline{CO}$ te razmotrite njihov odnos prema stranicama $\triangle GHI$.
(2) Uporabite rezultate dokazane u aktivnosti **Fermat-Torricellijeva točka**.) Ako ne uspijete, prijeđite na detaljnije savjete koji slijede.

DOKAZIVANJE

U prethodnom odjeljku trebali ste uočiti ovaj iznenađujući rezultat:

Ako konstruirate jednakostranične trokute nad stranicama trokuta, a zatim spojite njihova središta, ponovo dobivate jednakostranični trokut.



Ispod su neki savjeti za planiranje mogućeg dokaza. Čitajte ih i radite pažljivo.

U prethodnim smo radovima već dokazali da se tri opisane kružnice sijeku u Fermat-Torricellijevoj točki O. Sada ćemo koristiti svojstva tetivnih četverokuta kako bismo pokazali da je mjera svakog kuta trokuta $\triangle GHI$ jednaka $60°$.

Pritisnite gumb koji prikazuje dužine AO, BO i CO i njihova sjecišta sa stranicama tokuta $\triangle GHI$.

Pritisnite potrebne gumbe u sketchu da vidite četverokute jasno u nekoliko sljedećih pitanja. Gumbi skrivaju četverokute kako vam skica ne bi bila pretrpana.

3. Koje je vrste četverokut $ADBO$? Zašto?

4. Na temelju 3. pitanja, što možete zaključiti o mjeri kuta $\angle AOB$? Zašto?

5. Koje je vrste četverokut $GBHO$? Zašto?
6. Na temelju 5. pitanja, što sada možete zaključiti o mjeri kuta $\angle GKO$? Zašto?
7. Koje je vrste četverokut $GOIA$? Zašto?
8. Na temelju 7. pitanja, što sada možete zaključiti o mjeri kuta $\angle GJO$? Zašto?
9. Što sada možete zaključiti o kutu $\angle KGJ$ u četverokutu $GJOK$? Zašto?
10. Ponovite pitanja 3. - 9. za bilo koji od druga dva kuta $\triangle GHI$.

Prezentirajte svoj dokaz

Prezentirajte svoj dokaz na pitanjima 3. - 10. Svoj dokaz možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom.

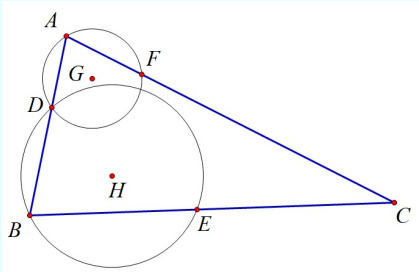
Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

Istražite što se događa s trokutom $\triangle GHI$ ako se različiti slični trokuti nalaze na stranicama $\triangle ABC$.

Miquelov problem

U ovoj aktivnosti istražit ćete konstrukciju na temelju proizvoljnih točaka na stranicama proizvoljnog trokuta i nekim kružnicama povezanima s ovim točkama. Rezultat koji ćete pronaći prvi je otkrio 1838. godine francuski matematičar **Auguste Miquel**.



NASLUĆIVANJE

Otvorite datoteku `Miquel.gsp`. Povucite različite točke da biste upoznali sketch.

1. Objasnite mjesta točaka G i H.

   Pritisnite gumb za prikaz kružnica kroz točke F, E i C i središte I.

2. Što primjećujete o tim trima kružnicama?

   Povucite bilo koju od točaka D, E i F kako biste provjerili ili promijenili svoje opažanje.

   Također promijenite oblik trokuta $\triangle ABC$ povlačenjem bilo kojeg vrha radi provjere ili promjene zapažanja.

   Pritisnite gumb za prikaz $\triangle GHI$.

Kako biste pronašli omjer dviju duljina dužina, odaberite obje dužine, zatim odaberite **Omjer** iz izbornika Mjerenja

3. Povucite točku A, B ili C. Što primjećujete o obliku $\triangle GHI$? (Ako je potrebno, mjerite kako biste potvrdili svoju pretpostavku.)

   Povucite točku D, E ili F kako biste provjerili ili promijenili zapažanje.

   Također promijenite oblik $\triangle ABC$ povlačenjem bilo kojeg vrha radi provjere ili promjene vašeg zapažanja u 3. pitanju.

IZAZOV

Možete li dokazati jedno od svojih naslućivanja iz 2. pitanja i 3. pitanja? (*Savjet*: Uporabite svojstvo da tetivni četverokut (konveksni četverokut kojemu se može opisati kružnica) ima nasuprotne kutove koji su suplementarni.)

DOKAZIVANJE

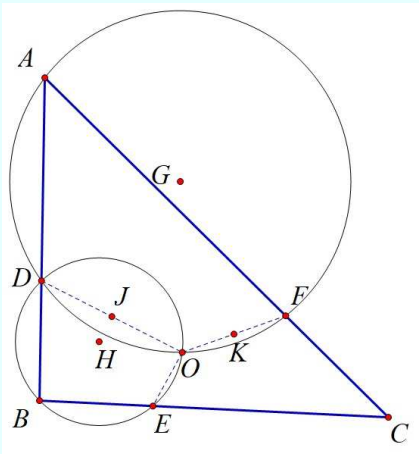
Trebali ste pronaći iznenađujuće rezultate da su tri kružnice uvijek konkurentne u jednoj točki i da središta G, H i I određuju trokut sličan trokutu $\triangle ABC$. Ova dva odvojena naslućivanja možemo iznijeti na sljedeći način.

Ako su tri točke D, E i F konstruirane na stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$, D na $\overline{AB}$, E na $\overline{BC}$ i F na $\overline{CA}$, tada vrijedi:

- Trokutima $\triangle ADF, \triangle BDE$ i $\triangle CEF$ opisane kružnice su konkurentne.
- Središta kružnica opisanih trokutima $\triangle ADF, \triangle BDE$ i $\triangle CEF$ određuju trokut sličan trokutu $\triangle ABC$.

Savjeti koji slijede pomoći će vam u dokazivanju ovih zapažanja. Čitajte i radite pažljivo.

DOKAZIVANJE KONKURENTNOSTI OPISANIH KRUŽNICA



Pritisnite gumb koji skriva kružnicu FEC.

Pritisnite gumb koji prikazuje dužine $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ i $\overline{OF}$ kao i točke J i K.

Pritisnite gumb koji skriva $\triangle GHI$.

Prvo ćemo dokazati da je četverokut $OECF$ tetivni. To znači da su tri kružnice ADF, BDE i CEF konkurentne u točki O.

4. Izrazite mjeru kuta $\angle DOF$ pomoću mjere kuta $\angle A$. Obrazložite svoju tvrdnju.

5. Izrazite mjeru kuta $\angle DOE$ pomoću mjere kuta $\angle B$. Obrazložite svoju tvrdnju.

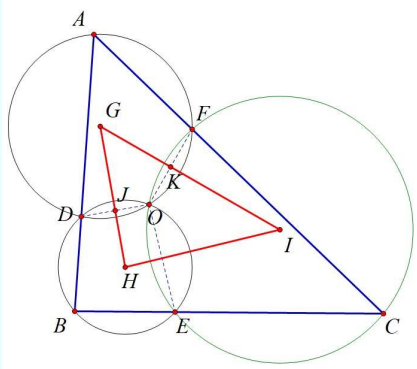
6. Pomoću 4. i 5. pitanja odredite mjeru kuta $\angle EOF$.

7. Uporabite 6. pitanje i svoje znanje o zbroju mjera kutova trokuta kako biste izrazili mjere kuta $\angle EOF$ pomoću mjera kuta $\angle C$.

8. Na temelju 7. pitanja i vašeg znanja o zbroju mjera kutova trokuta, što sada možete zaključiti o četverokutu $OECF$? Zašto?

DOKAZIVANJE SLIČNOSTI TROKUTA $\triangle GHI$ I TROKUTA $\triangle ABC$

Sada ćete dokazati svoje drugo naslućivanje. Koristite gumbe u svojem sketchu/skici za prikaz četverokuta kojeg trebate u ovom sljedećem odjeljku.



Pokažite $\triangle GHI$.

9. Koje je vrste četverokut $GDHO$? Zašto?

10. Na temelju 9. pitanja, što sada možete reći o $\angle GJO$? Zašto?

11. Koje je vrste četverokut $GOIF$? Zašto?

12. Na temelju 11. pitanja, što sada možete reći o $\angle GKO$? Zašto?

13. Na temelju 10. i 12. pitanja, što možete zaključiti o četverokutu $GJOK$? Zašto?

14. Na temelju 4. pitanja u prethodnom razmatranju i 13. pitanja što sada možete zaključiti o $\angle JGK$? Zašto?

15. Ponovite pitanja 9. - 14. za bilo koji drugi kut trokuta $\triangle GHI$.

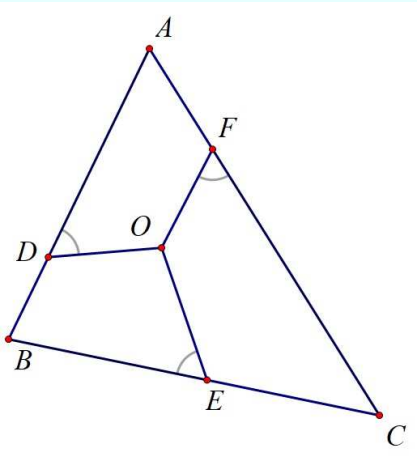
Prezentirajte svoje dokaze

Pregledajte gore navedene korake za oba dokaza. Svoje dokaze možete napisati i prezentirati sa Sketchpadovom datotekom/skicom. Ako želite, prodiskutirajte svoje objašnjenje u paru ili grupi.

Daljnje istraživanje

1. Istražite što se događa ako točka D pripada pravcu AB, ali ne nužno između točaka A i B. Jesu li rezultati još uvijek valjani ako jedna ili više točaka D, E i F pripadaju pravcima stranica $\triangle ABC$?

2. Započnite s proizvoljnom točkom O u trokutu ABC i konstruirajte polupravce tako da odgovarajući kutovi (v. sl.) budu jednaki. (Uporabite datoteku `Miquel 2.gsp`.) Koja naslućivanja možete napisati i dokazati?

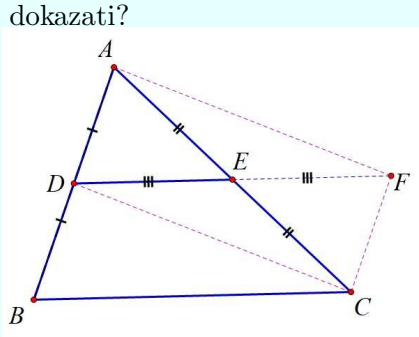


6. Dokaz kao sistematizacija

Michael de Villiers u radu s nastavnicima u Hrvatskoj

Obrazloženje unatrag: polovišta trokuta

U aktivnostima **Jednakokračni trapez** i **Polovišta deltoida** koristili smo tvrdnju da polovišta dviju stranica trokuta određuju dužinu koja je paralelna s trećom stranicom i upola je kraća od nje. Zašto je ovaj rezultat istinit? Možemo li to dokazati?



DOKAZIVANJE

Evo nekoliko savjeta za planiranje mogućeg dokaza. Čitajte i radite do kraja ako želite ili pokušajte sastaviti vlastiti dokaz. Ako je potrebno, otvorite datoteku `Polovišta trokuta.gsp` koji će vam pomoći odgovoriti na pitanja koja slijede.

Uzmite u obzir gornju sliku na kojoj je navedeno da su $|AD| = |DB|$ i $|AE| = |EC|$.

Produljite $\overline{DE}$ do F tako da je $|DE| = |EF|$. Spojite točke A i C s točkom F te D s C.

1. Što možete zaključiti o četverokutu $ADCF$? Zašto?
2. Na temelju prvog pitanja, što možete zaključiti o $\overline{FC}$ i $\overline{AD}$?
3. Na temelju 2. pitanja, što možete zaključiti o $\overline{FC}$ i $\overline{DB}$ te o četverokutu $DBCF$?
4. Na temelju 3. pitanja, što možete zaključiti o $\overline{DF}$ i $\overline{BC}$ te o $\overline{DE}$ i $\overline{BC}$?

Prezentirajte svoj dokaz

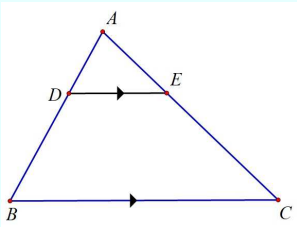
Napišite svoje objašnjenje na jasan, sustavan način, navodeći razloge za svaki korak i budite ga spremni prezentirati ostatku razreda.

Daljnje istraživanje

Kako glasi obrat tvrdnje koju ste upravo dokazali? Formulirajte ga u nastavku pa pomoću Sketchpada istražite je li obrat istinit ili nije izvodeći dokaz ili protuprimjer.

Obrazloženje unatrag: usporedni pravci

U aktivnosti **Usporedni pravci** koristili smo tvrdnju da pravac usporedan s jednom stranicom trokuta dijeli ostale dvije stranice u jednakim omjerima. Ali, zašto je ta tvrdnja istinita? Možemo li i to dokazati?



DOKAZIVANJE

Evo nekoliko savjeta za planiranje dokaza. Čitajte i radite pažljivo. Uzmite u obzir gornju sliku, gdje je dano da je $\overline{DE}$ usporedna s jednom stranicom trokuta i dijeli ostale dvije stranice u jednakim omjerima. Ali zašto je ovaj rezultat istinit? Možemo li to dokazati?

1. Što možete reći o kutovima $\angle ADE$ i $\angle ABC$? Zašto?
2. Što sada možete reći o trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$? Zašto?
3. Na temelju 2. pitanja, što možete zaključiti o omjeru $\dfrac{|AB|}{|AD|}$ u odnosu na omjer $\dfrac{|AC|}{|AE|}$?
4. Prepišite omjer iz 3. pitanja, zamjenjujući $|AD| + |DB|$ s $|AB|$ te $|AE| + |EC|$ umjesto $|AC|$.
5. Na temelju pitanja 3. i 4., što sada možete zaključiti o omjeru $\dfrac{|DB|}{|AD|}$ u odnosu na omjer $\dfrac{|EC|}{|AE|}$? Zašto?
6. Što se događa ako je D polovište stranice $\overline{AB}$? Kako je to povezano s teoremom dokazanim u aktivnosti Polovišta trokuta?

Prezentirajte svoj dokaz

Napišite svoj dokaz na jasan i sustavan način, navodeći razloge za svaki korak i budite ga spremni prezentirati ostatku razreda.

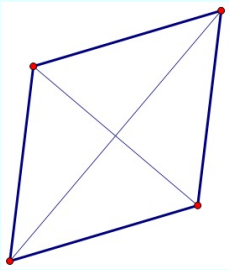
Daljnje istraživanje

Kako glasi obrat poučka koji ste upravo dokazali? Formulirajte ga u nastavku i pomoću Sketchpada istražite je li obrat istinit ili nije, izvodeći dokaz ili protuprimjer.

Sistematiziranje svojstava romba

Ranije ste otkrili ili saznali da, između ostalog, romb ima sljedeća svojstva:

- Sve stranice su jednakih duljina.
- Dijagonale su okomite.
- Dijagonale se međusobno raspolavljaju.
- Postoje dvije osi simetrije (kroz parove nasuprotnih kutova).
- Nasuprotne stranice su paralelne.



OPISIVANJE

Kako biste nekome tko još nije upoznat s rombom telefonski opisali što je romb?

1. Što mislite koje biste od sljedećih opisa mogli koristiti? Zaokružite slovo ispred opisa.

   a. Romb je svaki četverokut s kojemu su nasuprotne stranice paralelne.

   b. Romb je svaki četverokut s okomitim dijagonalama.

   c. Romb je svaki četverokut s dvije okomite osi simetrija (svaka kroz par nasuprotnih kutova).

   d. Romb je svaki četverokut s okomitom dijagonalama koje se raspolavljaju.

   e. Romb je svaki četverokut s dva para susjednih stranica jednakih duljina.

   f. Romb je svaki četverokut kojemu su sve četiri stranice jednakih duljina.

   g. Romb je svaki četverokut s jednim parom susjednih stranica jednakih duljina i paralelnim nasuprotnim stranicama.

Jedan od načina testiranja opisa je konstruiranje lika u skladu s opisom kako bismo vidjeli daje li željeni lik.

2. Otvorite datoteku `Rombovi.gsp` i provjerite svaki od opisa a - g.

   Pritisnite svaki gumb, korak po korak, na svakoj od sedam stranica za konstrukciju lika. Kad je svaka konstrukcija završena, uparite svaku stranicu s opisom u tablici. Povucite svaki lik kako biste vidjeli je li uvijek ostaje romb. (*Napomena*: Budući da se romb može dobiti u obliku kvadrata, smatramo da je kvadrat poseban slučaj romba.) U tablici, prekrižite nazive stranica na kojima se konstruiraju četverokuti koji nisu uvijek rombovi.

stranica	**opis (a - g)**
romb 1	
romb 2	
romb 3	
romb 4	
romb 5	
romb 6	
romb 7	

3. Navedite opise iz a - g za koje mislite da ispravno opisuju romb.

4. Navedite opis iz a - g za koji vi osobno mislite da najbolje opisuje romb. Pokušajte obraniti svoj izbor dobrim argumentima.

5. Pažljivo proučite sljedeće opise i komentirajte njihovu prikladnost.

   a. Romb je svaki četverokut kojemu su dijagonale jednakih duljina.
   b. Romb je svaki četverokut kojemu su sve četiri stranice jednakih duljina, nasuprotne stranice paralelne i okomite i kojemu se dijagonale raspolavljaju.
   c. Romb je svaki četverokut koji izgleda kao romb.
   d. Romb je svaki četverokut sa svim stranicama jednakih duljina, ali ne sa svim kutovima jednakih veličina.

IZAZOV

Koristeći samo logičko zaključivanje, možete li dokazati da se svih pet svojstva romba, navedenih na početku i koja nisu uključena u vaše opise u 2. pitanju, mogu izraziti iz njih? Započnite od opisa vaše pretpostavke, a zatim dokažite poučak da romb ima svako od svojstava navedenih na početku. Osim što opis koristite kao pretpostavku u tim dokazima, možete ga koristiti za sve nove teoreme koje ćete dokazati u naknadnim dokazima drugih svojstava.

DOKAZIVANJE SVOJSTAVA ROMBA IZ DEFINICIJA

Kad pogledamo povijest matematike, vidimo neku vrstu životnog, elementarnog ritma. Postoje periodi neurednog rasta, kada se uzbuđene, vitalne strukture uzdižu nad neiskusnim pretpostavkama, a labavi krajevi leže posvuda. Logika i preciznost se ne poštuje neopravdano; jer nemir, entuzijazam, odvažnost i sposobnost toleriranja određene zbrke su odgovarajuće kvalitete uma u ovo doba. Takva razdoblja slijede stanke radi konsolidacije, kada analitičari i sistematizatori rade; materijal je logički uređen, praznine su ispunjene, labavi krajevi uredno vezani, a rigorozni dokazi jesu isporučeni. Svečani komentatori sude o velikim inovatorima. Čitava područja matematike se pretvaraju u deduktivni sustav, temeljen na skupovima nedokazanih, eksplicitno navedeni aksioma.

- L. W. H. Hull, 1969. godine

Ovdje ćemo se pozabaviti drugim dijelom gornjeg citata, tj. logičkom organizacijom svojstava romba. Uloga ili svrha dokaza ovdje stoga neće biti objašnjenje, otkriće ili provjera svojstava romba nego njihova sistematizacija.

U prethodnom dijelu ove aktivnosti otkrili ste da se svaki od sljedećih opisa može koristiti za točnu konstrukciju romba:

A. Romb je svaki četverokut s dvije okomite osi simetrija (svaka os kroz par nasuprotnih kutova).

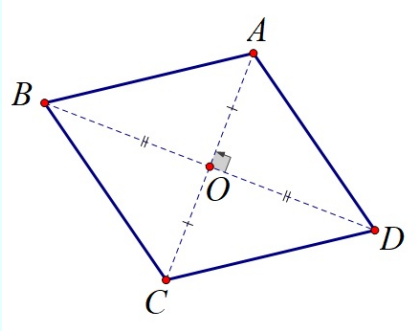
B. Romb je svaki četverokut s okomitim dijagonalama koje se međusobno raspolavljaju.

C. Romb je svaki četverokut sa svim stranicama jednake duljine.

D. Romb je svaki četverokut s jednim parom susjednih stranica jednakih duljina i s paralelnim nasuprotnim stranicama.

U matematici takve opise nazivamo *definicijama*. Kao što vidimo, može biti mnogo različitih načina na koje možemo definirati matematičke objekte. Sada moramo pokazati da sva druga svojstva romba logički slijede kao teorem iz svake od ovih definicija. Sada ćemo dati primjer za definiciju B.

Definicija: *Romb je bilo koji četverokut s okomitom dijagonalama koje se međusobno raspolavljaju.*



Razmotrimo sliku zadanog četverokuta s dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ koje su međusobno okomite i koje se raspolavljaju u točki O.

Poučak 1.: *Sve stranice romba su jednake duljine.*

6. Što možete reći o trokutima $\triangle ABO$ i $\triangle ADO$? Zašto?
7. Prema 6. pitanju, što možete zaključiti o stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$?
8. Što možete reći o trokutima $\triangle ABO$ i $\triangle CBO$? Zašto?
9. Prema 8. pitanju, što možete zaključiti o stranicama $\overline{AB}, \overline{CB}$ i $\overline{AD}$?
10. Što možete reći o trokutima $\triangle ADO$ i $\triangle CDO$? Zašto?
11. Prema 10. pitanju, što sada možete zaključiti o sve četiri stranice $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{AB}$ i $\overline{CB}$?

    Poučak 2.: *Dijagonale romba raspolavljaju parove nasuprotnih kutova.*

12. Što možete reći o trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$? Zašto?
13. Prema 12. pitanju, što možete zaključiti o kutovima $\angle BAC$ i $\angle DAC$ kao i o kutovima $\angle BCA$ i $\angle DCA$?
14. Što možete reći o trokutima $\triangle ABD$ i $\triangle CBD$? Zašto?
15. Prema 14. pitanju, što možete zaključiti o kutovima $\angle ABD$ i $\angle CBD$ kao i o kutovima $\angle ADB$ i $\angle CDB$?

    Poučak 3.: *Dijagonale romba su osi simetrije.*

16. Prema 12. pitanju u prethodnom dokazu, što možete zaključiti o pravcu AC? Zašto?
17. Prema 14. pitanju iz prethodnog dokaza, što možete zaključiti o pravcu BD? Zašto?

    Poučak 4.: *Nasuprotne stranice romba su paralelne.*

18. Što možete reći o trokutima $\triangle ABO$ i $\triangle CDO$? Zašto?

19. Prema 18. pitanju, što možete zaključiti o kutu $\angle BAO$ i kutu $\angle DCO$?

20. Prema 19. pitanju, što sada možete zaključiti o stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$?

21. Kako biste dovršili dokaz uporabite isti argument kao u pitanjima 18. - 20. za preostale dvije stranice.

Prezentirajte svoje dokaze

Jasno napišite svoje dokaze za prezentaciju svojoj grupi ili razredu.

Daljnje istraživanje

1. Sada odaberite bilo koje dvije od preostale tri moguće definicije A, C i D za romb. Prikažite kako se preostala svojstva, navedena na početku, a koja nisu uključena u vašu definiciju, mogu dokazati kao teoremi.

2. Pojam se također može definirati u smislu njegovih odnosa s drugima pojmovima. Romb se može promatrati i kao poseban paralelogram ili poseban deltoid, budući da se oba mogu povući u oblik romba. Pokušajte definirati romb koristeći ove odnose.

3. Romb se također može promatrati kao poseban tangencijalan četverokut (tj. četverokut kojemu se može upisati kružnica). Pokušajte definirati romb kao tangencijalni četverokut s dodatnim svojstvima.

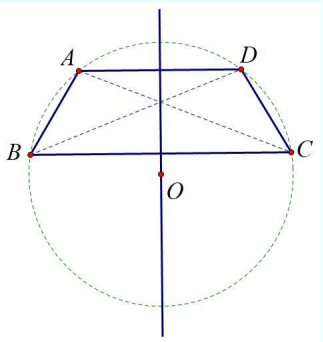
Razredna rasprava

Definicija se može smatrati dogovorom između zainteresiranih strana oko toga što je određeni objekt. Iako ste sada vidjeli da je moguće definirati romb na mnogo različitih načina, može biti vrlo zbunjujuće ako svatko koristi drugačiju definiciju. Stoga je potrebno odabrati zajedničku definiciju koja će biti prihvatljiva za cijeli razred. Raspravite u razredu kako biste odlučili koja je definicija romba najprikladnija vama i razredu.

Sistematiziranje svojstava jednakokračnog trapeza

U aktivnostima Jednakokračni trapez i Tetivni četverokut trebali biste otkriti da jednakokračni trapez, između ostalih, ima sljedeća svojstva:

- Ima dva (različita) para susjednih kutova jednakih veličina.
- Ima barem jedan par nasuprotnih stranica jednakih duljina.
- Ima barem jednu os simetrije koja raspolavlja par nasuprotnih stranica.
- Dijagonale su jednakih duljina.
- Ima barem jedan par paralelnih stranica.
- Tetivni je četverokut.



OPISIVANJE

Kako biste opisali preko telefona nekome tko još nije upoznat s jednakokračnim trapezom što je jednakokračni trapez?

1. Što mislite koji biste od sljedećih opisa mogli koristiti? Zaokružite slovo ispred opisa.

   a. Jednakokračni trapez je svaki četverokut kojemu su dijagonale jednakih duljina.

   b. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednom osi simetrije kroz par nasuprotnih stranica i jednim parom susjednih kutova jednakih veličina.

   c. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednim parom paralelnih stranica i najmanje jednim parom nasuprotnih stranica jednakih duljina.

   d. Jednakokračni trapez je svaki tetivni četverokut s najmanje jednim parom paralelnih nasuprotnih stranica.

2. Ako jedan ili više od gore navedenih opisa nisu prihvatljivi, kako biste ih mogli ispraviti ili poboljšati?

   Jedan od načina testiranja opisa je konstruiranje lika u skladu s opisom kako biste vidjeli je li zaista željeni lika.

3. Otvorite datoteku `Jednakokračni trapez.gsp` kako biste provjerili svaki od opisa a - d.

   Pritisnite gumb korak po korak za konstruiranje lika. Kada je konstrukcija završena, povucite lik da vidite ostaje li uvijek jednakokračni trapez. Ako je potrebno, napravite i mjerenja.

   Uskladite svaku stranicu sketcha s opisom stranice (a - d) u tablici. Dvije od pet danih konstrukcija temelje se na istom opisu, ali jedna od njih poboljšava taj opis.

stranica	**opis (a - d)**
jednakokračni trapez 1	
jednakokračni trapez 2	
jednakokračni trapez 3	
jednakokračni trapez 4	
jednakokračni trapez 5	

   Napomena: Budući se jednakokračni trapez može povući do oblika pravokutnika (i kvadrata). Pravokutnici (i kvadrati) smatraju se posebnim slučajevima jednakokračnih trapeza. U tablici prekrižite nazive stranica sketcha na kojima se konstruiraju likovi koji nisu uvijek jednakokračni trapezi.

4. Koja konstrukcija poboljšava jedan od opisa a - d? Zapišite koji je opis poboljšan.

5. Jedan od opisa a - d ima više informacija nego što je to zapravo bilo korisno u konstruiranju. Koji je to opis? Prepišite taj opis ovdje, koristeći se samo svojstvima korištenima u konstrukciji.

6. Pažljivo proučite sljedeće opise i komentirajte njihovu prikladnost.

   a. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s okomitim dijagonalama.
   b. Jednakokračni trapez je svaki četverokut koji izgleda kao jednakokračan trapez.
   c. Jednakokračni trapez je svaki četverokut kojemu su susjedni kutovi jednakih veličina.

d. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s jednim parom nasuprotnih stranica jednakih duljina, jednom osi simetrije koja raspolavlja par nasuprotnih stranica, dijagonale i jedan par paralelnih stranica.

e. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s jednom osi simetrije, ali kojemu svi kutovi nisu jednakih veličina.

IZAZOV

Koristeći samo logičku dedukciju, možete li dokazati da se sva druga svojstva jednakokračnog trapeza, koja su navedena na početku, a nisu uključena u korektne opise 3. - 5. pitanja, mogu izvesti iz njih? Započnite korištenjem jednog od ovih opisa kao svojom pretpostavkom, a zatim dokažite kao teoreme da za jednakokračni trapez vrijedi svako od preostalih svojstava na početku. Osim korištenja vašeg opisa kao pretpostavke u ovim dokazima, možete koristiti bilo koje nove dokazane teoreme drugih svojstava.

DOKAZIVANJE SVOJSTAVA JEDNAKOKRAČNOG TRAPEZA IZ DEFINICIJA

U ranijim smo aktivnostima vidjeli da dokaz može imati sljedeće matematičke uloge:

- *objašnjenje* (osigurava uvid u to zašto je nešto istina)
- *otkriće* (pomaganje u otkrivanju ili pronalasku novih rezultata)
- *provjera* (provjeravanje valjanosti ili istinitosti tvrdnje)

U ovoj će se aktivnosti dokaz koristiti na potpuno drugačiji način. Ovdje ćemo se usredotočiti na organiziranje svojstava jednakokračnog trapeza u logički sustav koji se sastoji od definicije (nedokazana tvrdnja) te poučka (dokazane tvrdnje). Svrha nije provjeriti jesu li ova svojstva istinita (već iz ranijih istraživanja znamo da jesu istinita), već istražiti i usporediti različite mogućnosti logičke organizacije.

U tom smislu, dokaz se sada koristi kao sredstvo za *sistematizaciju* (tj. kao alat za logičko organiziranje prethodno nepovezanih svojstava ili tvrdnji u deduktivni sustav).

Uobičajena, ali lažna koncepcija je da postoji samo jedna (ispravna) definicija za svaki definirani objekt u matematici; zapravo, kako smo ovdje vidjeli, mogu postojati različite (točne) definicije. Još jedno pogrješno shvaćanje je to da matematika uvijek počinje definicijama. Doista, nema definicija matematičkih objekata koje su *a priori*

prisutne u prirodi. U većini slučajeva matematika počinje problemima, a *završava* definicijama i deduktivnim sustavima.

Evo tri primjera različitih ispravnih i operativnih definicija za jednakokračni trapez, koje ste možda otkrili u prethodnom odjeljku ove aktivnosti:

A. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednim parom paralelnih stranica i dijagonalama jednakih duljina.

B. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednom osi simetrije kroz par nasuprotnih stranica.

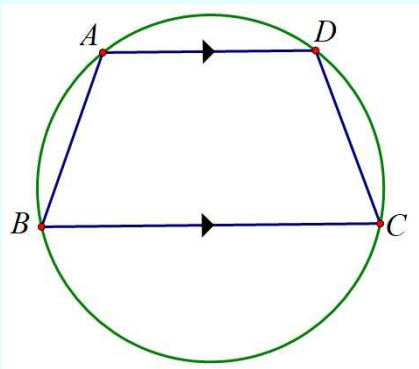
C. Jednakokračni trapez je svaki tetivni četverokut s najmanje jednim parom paralelnih nasuprotnih stranica.

Moguće su i druge definicije. Koja je najbolja? To je stvar mišljenja. No, zanimljivo, nakon što odaberete svoju (nedokazanu) definiciju, svojstva u drugim definicijama mogu se dokazati kao teoremi. I sva druga svojstva jednakokračnih trapeza dana na početku ove aktivnosti mogu se dokazati polazeći od bilo koje od ovih triju definicija.

Kako biste ilustrirali ovu ideju, počet ćete s definicijom C, što vam je vjerojatno najmanje poznata definicija i odgovoriti na pitanja koja čine dokaze ostalih svojstava jednakokračnog trapeza. Ograničit ćemo se ovdje na slučaj konveksnog tetivnog trapeza, ali slični dokazi se mogu izvesti i za slučaj ukrštenog tetivnog trapeza.

Definicija: *Jednakokračni trapez je svaki tetivni četverokut s najmanje jednim parom paralelnih nasuprotnih stranica.*

Poučak 1.: *Jednakokračni trapez ima dva (različita) para susjednih kutova jednakih veličina.*



Promotrimo sliku na kojoj je dano da je $ABCD$ tetivni i $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

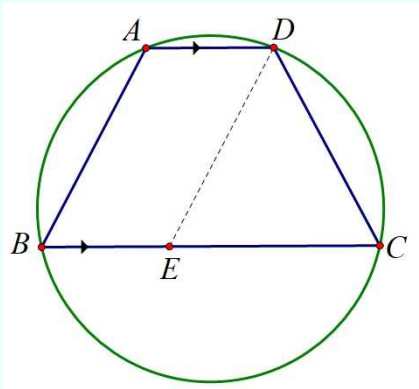
7. Kakav je odnos između kutova $\angle A$ i $\angle C$? Zašto?

8. Kakav je odnos između kutova $\angle A$ i $\angle B$? Zašto?

9. Prema 7. i 8. pitanju, što sada možete zaključiti o kutovima $\angle B$ i $\angle C$ pri vrhovima B i C?

10. Dopunite ostatak dokaza pokazujući da je mjera kuta $\angle A$ jednaka mjeri kuta $\angle D$.

    Poučak 2.: *Jednakokračni trapez ima barem jedan par nasuprotnih stranica jednakih duljina.*



    Promotrimo sliku na kojoj je zadano kao i na prethodnoj slici.

    Konstruirajte $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ kako je prikazano.

11. Što možete reći o kutu $\angle DEC$ i kutu $\angle ABE$? Zašto?

12. Prema poučku 1., što možete reći o kutovima $\angle ABE$ i $\angle DCE$?

13. Prema 11. i 12. pitanju, što sada možete zaključiti o kutovima $\angle DEC$ i $\angle DCE$?

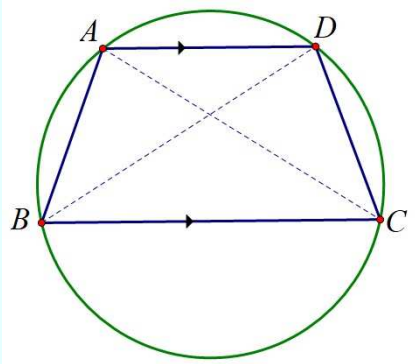
14. Prema 13. pitanju, što sada možete zaključiti o trokutu $\triangle DEC$ i njegovim stranicama $\overline{DC}$ i $\overline{DE}$?

15. Koje je vrste četverokut $ABED$? Zašto?

16. Prema 15. pitanju, što možete reći o stranicama $\overline{DE}$ i $\overline{AB}$?

17. Prema 14. i 16. pitanju, što sada možete zaključiti o stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$?

    Poučak 3.: *Dijagonale jednakokračnog trapeza jednakih su duljina.*

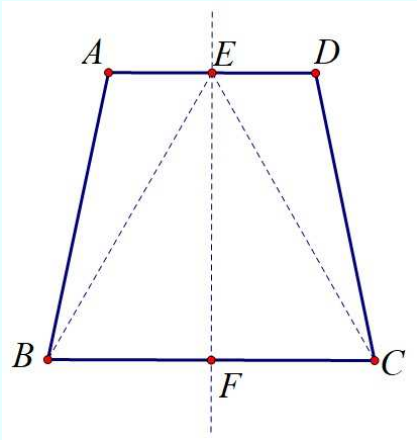


Promotrite sliku.

18. Što možete reći o odnosu između trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DCB$? Zašto?

19. Prema 18. pitanju, što sada možete zaključiti o odgovarajućim stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$?

Poučak 4.: *Jednakokračni trapez ima najmanje jednu os simetrije kroz par nasuprotnih stranica.*



Promotrite sliku. Konstruirajte simetralu dužine$\overline{AD}$ kroz E kao što je prikazano i označite njezino sjecište s $\overline{BC}$ kao F. Sada moramo dokazati da je ovaj pravac os simetrije četverokuta $ABCD$; odnosno trebamo pokazati da je pravac EF simetrala dužine $\overline{BC}$.

20. Što možete reći o kutu $\angle BFE$? Zašto?

21. Što možete reći o odnosu između trokuta $\triangle ABE$ i $\triangle DCE$? Zašto?

22. Prema 21. pitanju, što sada možete zaključiti o odgovarajućim stranicama $\overline{BE}$ i $\overline{CE}$?

23. Što sada možete reći o odnosu između trokuta $\triangle EBF$ i $\triangle ECF$? Zašto?

24. Prema 23. pitanju, što sada možete zaključiti o odgovarajućim stranicama $\overline{BF}$ i $\overline{CF}$?

25. Prema 24. pitanju, što sada možete zaključiti o pravcu EF? Zašto?

Sistematizirajte više

Sada odaberite bilo koju od definicija A ili B za jednakokračni trapez i pokažite, kao u primjeru, kako se ostala svojstva, navedena na početku, a koja nisu uključena u vašu definiciju, mogu dokazati kao teoremi.

Istražite daljnje definicije

Istražite, koristeći Sketchpad ako je potrebno, je li neka od sljedećih definicija jednakokračnog trapeza korektna. Ako jest, navedite potpunu deduktivnu sistematizaciju svojstava jednakokračnog trapeza, slično onima na prethodnoj stranici.

1. Jednakokračni trapez je svaki tetivni četverokut s najmanje jednim parom jednakih nasuprotnih stranica.

2. Jednakokračni trapez je svaki tetivni četverokut s najmanje jednim parom susjednih kutova jednakih veličina.

3. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednim parom nasuprotnih stranica jednakih duljina i barem jednim parom susjednih kutova jednakih veličina.

4. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s najmanje jednim parom paralelnih stranica i najmanje jednim parom susjednih kutova jednakih veličina.

5. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s dva (različita) para susjednih kutova jednakih veličina.

6. Jednakokračni trapez je svaki četverokut s dijagonalama jednakih duljina i s barem jednim parom nasuprotnih stranica jednakih duljina.

Možete li formulirati još neke moguće vlastite definicije?

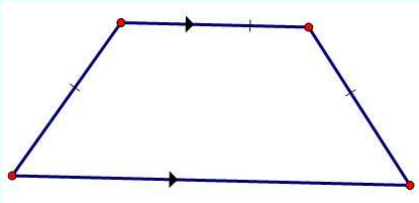
Razredna rasprava

Definicija se može smatrati dogovorom između zainteresiranih strana oko toga što je određeni objekt. Iako ste sada vidjeli da je moguće definirati jednakokračni trapez na mnogo različitih načina, može biti vrlo zbunjujuće ako svatko koristi drugačiju definiciju. Stoga je potrebno odabrati

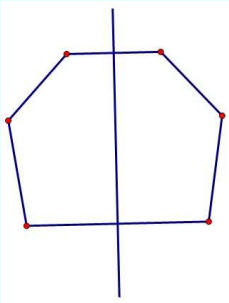
zajedničku definiciju koja će biti prihvatljiva cijelom razredu. Raspravite u razredu kako biste odlučili koja je definicija najprikladnija vama i razredu.

Definiranje i istraživanje novih koncepata

Novi matematički objekti često se definiraju mijenjanjem ili proširivanjem definicije ili svojstava poznatih objekata u matematici. Sljedeći su primjeri u vezi s konceptom jednakokračnog trapeza.



1. Istražite ima li *trokraki trapez*, odnosno jednakokračni trapez s najmanje tri stranice jednakih duljina, kao što je prikazano na slici, još neka zanimljiva svojstva osim onih jednakokračnog trapeza.
   (*Savjet*: Pogledajte kako dijagonale dijele kutove.) Dokažite svoja zapažanja.



2. Istražite svojstva jednakokračnog šesterokuta, odnosno šesterokuta s najmanje jednom osi simetrije kroz par nasuprotnih stranica. Dokažite svoje zapažanje. Možete li dalje generalizirati?

7. Bilješke i upute za nastavnike

Petar Mladinić na skupu nastavnika u Hrvatskoj

Uz tekstove i poglavlja sastavni su dio knjige Dokazivanje i dokazi u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi datoteke koje omogućuju aktivnost i traženje odgovora na postavljena pitanja.

Činjenice i svojstva koja se naslućuju, otkrivaju, uobličavaju, poopćavaju te dokazuju, odnosno, drugim riječima, koja se generiraju kao odgovori na postavljena pitanja, nastavnici i učenici mogu nakon završetka neke aktivnosti potražiti u dostupnoj literaturi. Na taj će način nastavnici i učenici graditi svoje samopouzdanje i povjerenje u uporabu Sketchpada kao alata za poučavanje i učenje matematike.

Popis članaka i knjiga **Michaela de Villiersa** ukazuje gdje se mogu naći potvrde mnogih odgovora dobivenih tijekom realizacije prijedloga pojedinih aktivnosti.

Dodatni aspekt tih matematičkih sadržaja može se naći i u popisu literature.

Evo popisa sketchpadovih pratećih datoteka. Svaki učitelj/nastavnik ili učenik može kreirati i svoje datoteke kao pomoć u rješavanju postavljenih problema.

Posebice treba upozoriti na zahtjev da se takve dinamične datoteke kreiraju u cilju prezentiranja učenikovih aktivnosti ostalim učenicima.

Poglavlje 2. Dokaz kao objašnjenje

- Udaljenosti.gsp
- Opskrba vodom I.gsp
- Opskrba vodom II.gsp
- Zbroj u trokutu.gsp
- Zbroj u četverokutu.gsp
- Zbroj u četverokutu II.gsp
- Tetivni četverokut.gsp
- Srednjica.gsp
- Težište.gsp
- Ceva.gsp
- Cevain peterokut.gsp
- Cevaina konkurentnost.gsp
- Jednakokračni deltoid.gsp
- Opskrba Ib.gsp
- Težište četverokuta.gsp
- Udaljenost u paralelogramu.gsp

- Udaljenost u rombu.gsp

Poglavlje 3. Dokaz kao otkriće

- Deltoid.gsp
- Jednakokračni trapez s polovištima.gsp
- Tangencijalni četverokut.gsp
- Konkavni tangencijalni četverokut.gsp
- Tangencijalni šeterokut.gsp
- Obrat tangencijalnog četverokuta.gsp

Poglavlje 4. Dokaz kao provjera

- Konkurentnost.gsp
- Paradoks.gsp
- Paralela.gsp
- Površine 2.gsp
- Površine.gsp
- Tetivni četverokut 2.gsp
- Tetivni četverokut.gsp
- Varignonova površina.gsp
- Visine.gsp
- Zraka svjetlosti.gsp

Poglavlje 5. Dokaz kao izazov

- Aubel 1.gsp
- Aubel 2.gsp
- Fermat 1.gsp
- Fermat 2.gsp
- Fermat 3.gsp
- Fermat 4.gsp
- Miquel 2.gsp
- Miquel.gsp
- Napoleon 2.gsp
- Napoleon.gsp
- Paralela.gsp

- Paralelogram.gsp
- Kvadrati na paralelogramu.gsp
- Simetrale kutova četverokuta.gsp
- Zračna luka 2.gsp
- Zračna luka 3.gsp
- Zračna luka 4.gsp
- Zračna luka 5.gsp
- Zračna luka.gsp

Poglavlje 6. Dokaz kao sistematizacija

- Jednakokračni trapez.gsp
- Paralela.gsp
- Polovišta trokuta.gsp
- Rombovi.gsp

`Napomena:` Poseban dodatak ovoj knjizi je knjiga

Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada
`- priručnik za nastavnike`

u kojem se nalaze upute i odgovori na postavljena pitanja u svakoj aktivnosti.

8. Dodatni tekstovi

Michael de Villiers na kongresu nastavnika u Hrvatskoj

U ovom poglavlju navodimo nekoliko već objavljenih, u različitim našim i stranim časopisima, tekstova o uporabi *Sketchpada* u istraživanju elementarne geometrije. U njima se "zrcale" sve aktivnosti obuhvaćene i elaborirane u prethodnim poglavljima ove knjige.

Ove tekstove su napisali **Michael de Villiers, Jelena Gusić**, **Petar Mladinić**, **Charles Worall** i **Martin Josefsson**. U svjetskoj literaturi postoji veliki broj tekstova ovog tipa. Postoji i veliki broj znanstvenih i stručnih istraživanja kojima se ukazuje da učenici uporabom *Sketchpada* puno više i bolje znaju matematiku.

Šest tekstova su na hrvatskom jeziku (i na plavoj podlozi stranice) te sedam tekstova su na engleskom jeziku (u izvornom obliku i na bijeloj podlozi).

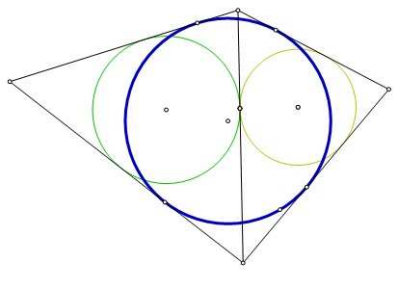
Posebice se ističe sljedeći tekst i otkriće nazvano Teorem Gusić - Mladinić.

Godine 2001. su Jelena Gusić i Petar Mladinić u časopisu **Poučak** prikazali uporabu računalnog programa *Geometer's Sketchpad* i kako je uporabljen u "stvaranju" novih matematičkih znanja. Ovdje imate prigodu prisustvovati jednom takvom istraživanju, otkrivanju i dokazivanju.

Ovaj poučak Michael de Villiers je nazvao imenom **Gusić - Mladinić** (vidi stranicu 198.). No, zbog skromnosti prof. Pavković je samo istaknuo da je dao poticaj za istraživanje pomoću *Sketchpada* te da otkriće i dokaz pripadaju J. Gusić i P. Mladiniću.

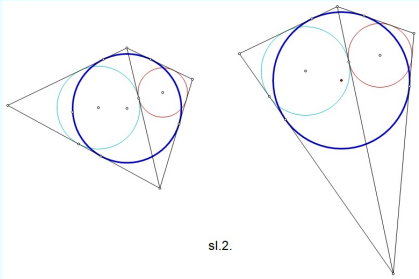
Jelena Gusić i Petar Mladinić: Tangencijalni četverokut

Pozvali smo profesora **Borisa Pavkovića** da upozna s program Pokazujući mu na koji smo način s učenicima istraživali tangencijalni četverokut i kako su učenici otkrili, a zatim dokazali poučak o tangencijalnom četverokutu, došli smo i do slike tangencijalnog četverokuta. Ideja je već bila tu. Rekao nam je: *Povucite jednu dijagonalu i u svaki od dobivenih trokuta upišite kružnicu. Što uočavate? Imaju li te kružnice zajedničkih točaka?* Pogledali smo i vidjeli da se dodiruju na povučenoj dijagonali.



sl.1.

Transformirali smo i dalje neke od tih slika (vidi sl. 2.).

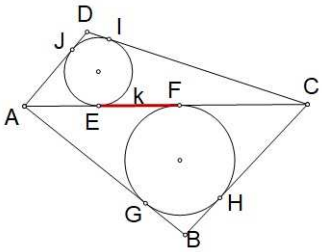


sl.2.

Vidjeli smo da se u svim slučajevima dodiruju. Naslutili smo sljedeći poučak.

Poučak 1.: *U dijagonalom trianguliranom tangencijalnom četverokutu kružnice upisane nastalim trokutima imaju zajedničko diralište.*

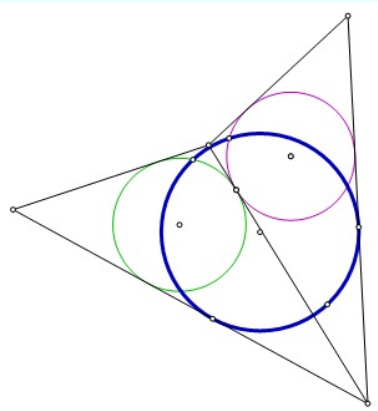
Dokaz: Uz oznake kao na slici dobivamo



Zbog tangencijalnosti četverokuta je:
|AG|+|GB|+|CI|+|DI| = |BH|+|HC|+|DJ|+|JA|,
a iz svojstava tangencijalnosti na kružnicu dobivamo:
|AE|+k+|BH|+|CF|+k+|DJ| = |BH|+|CF|+|DJ|+|AE|
pa je
2k = 0, odnosno k = 0

sl. 3.

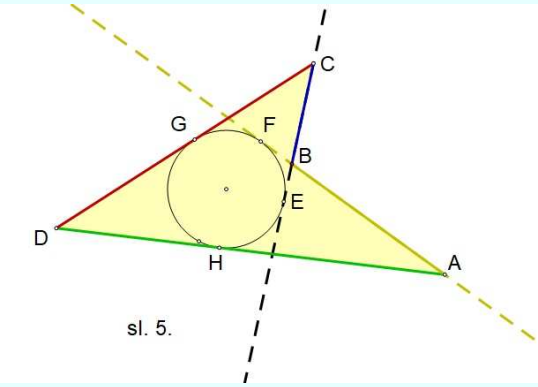
Istražujući i dalje pojavilo se nešto neobično:



sl. 4.

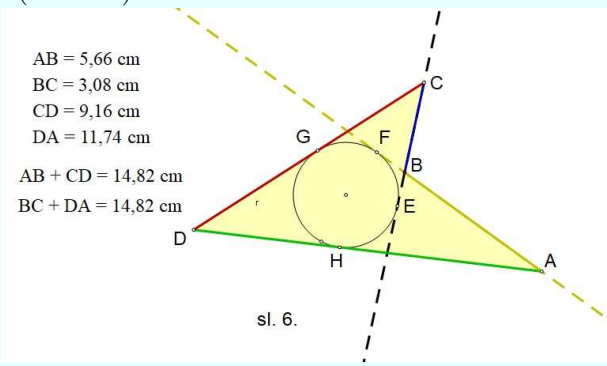
Ovo nas je zaintrigiralo. Na slici je bio nekonveksni četverokut. Može li on biti tangencijalan? Uvijek smo tangencijalni četverokut crtali tako da bude konveksan. Ima li smisla to što smo dobili? Pogledajmo kako taj

četverokut izgleda:



sl. 5.

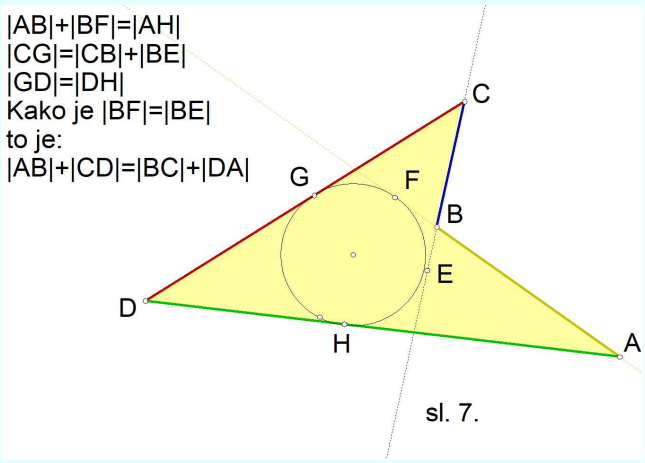
Pravci na kojima se nalaze stranice četverokutu tangente su kružnice. *Geometer's Sketchpad* je pokazao da je naše naslućivanje o odnosu duljina stranica točno (v. sl. 6.).



sl. 6.

Bilo je jednostavno dokazati:

zbrojevi duljina nasuprotnih stranica četverokuta međusobno su jednaki (v. sl. 7.).



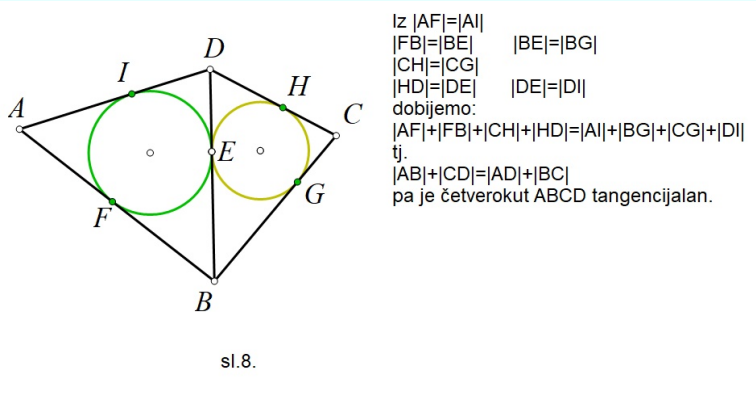
sl. 7.

Dakle, nije neprirodno i ovakve četverokute nazvati tangencijalnim. Kako i za nekonveksne tangencijalne četverokute vrijedi tvrdnja o stalnosti zbroja duljina nasuprotnih stranica, to navedeni dokaz poučka o upisanim kružnicama vrijedi i u ovom slučaju.

Prof. Pavković je prokomentirao: *Vidite, moje naslućivanje je bilo točno. Ako imamo neki poučak uvijek se pitamo vrijedi li i obrat. Ja naslućujem da vrijedi i obrat poučka tj. da vrijedi sljedeći poučak.*

Poučak 2.: *Ako se dvije kružnice, upisane u dijagonalom triangulirani četverokut, dodiruju na dijagonali, četverokut je tangencijalan.*

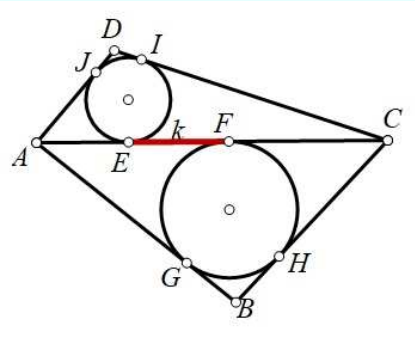
Dokaz:



sl.8.

Na taj smo način našli jednu **novu karakterizaciju** tangencijalnog četverokuta.

Upisivanje kružnica u dijagonalom triangulirani četverokut ponovili smo za netangencijalni četverokut. Udaljenost između dirališta kružnica s dijagonalom jednaka je nenegativnom realnom broju k. Htjeli smo proučiti kako se broj k mijenja s mijenjanjem vrste četverokuta.



sl. 9.

Jasno je da *četverokut je tangencijalan ako i samo ako je* $k = 0$. Došlo je vrijeme uvođenja novog pojma, tj. pojma koeficijenta tangencijalnosti. Za neki četverokut možemo definirati *koeficijent tangencijalnosti* kao broj

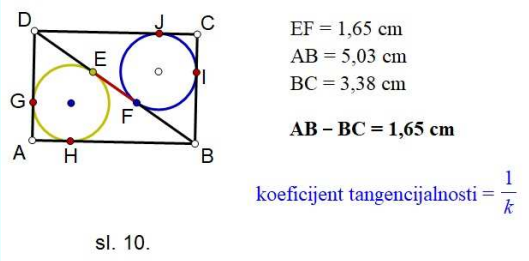
$\frac{1}{k}$. Tangencijalni četverokut ima maksimalan koeficijent tangencijalnosti.

Profesor Pavković je postavio sljedeće pitanje: *Može li se konstruirati četverokut unaprijed zadanog koeficijenta tangencijalnosti?*

A zatim je, nakon nekog vremena, dodao:

Promatrajte pravokutnik i otkrijte vezu koeficijenta k i duljinâ njegovih stranica.

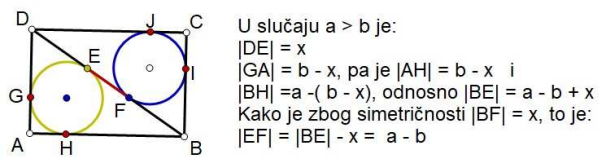
Opet smo počeli crtati:



sl. 10.

Bilo je očito da je $k = |a - b|$. Nije nas iznenadilo to što smo dobili jer smo zbog činjenice da je $k = 0$ jedino u slučaju kad je pravokutnik kvadrat očekivali da će se izraz $a - b$ pojaviti u nekom obliku.

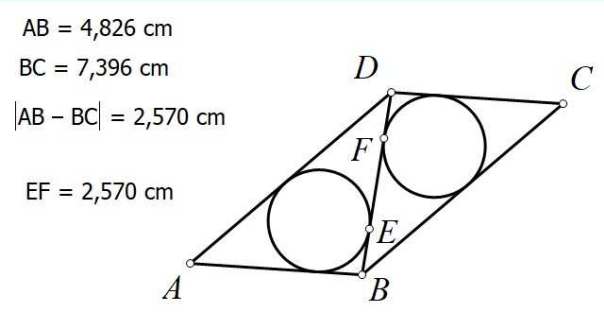
Evo i dokaza:



sl. 11.

Zapitali smo se: *vrijedi li ovo i za bilo koji paralelogram*?

Geometer Sketchpad nam je pokazao, ono što se i iz dokaza vidjelo da bi isto dobili i s bilo kojim paralelogramom.



sl.12.

Štoviše, mi smo provjerili, a zatim dokazali sljedeći poučak:

Poučak 3.: *U bilo kojem četverokutu (konveksnom ili nekonveksnom) vrijedi*

$$2 \cdot |EF| = |(a+c) - (b+d)|,$$

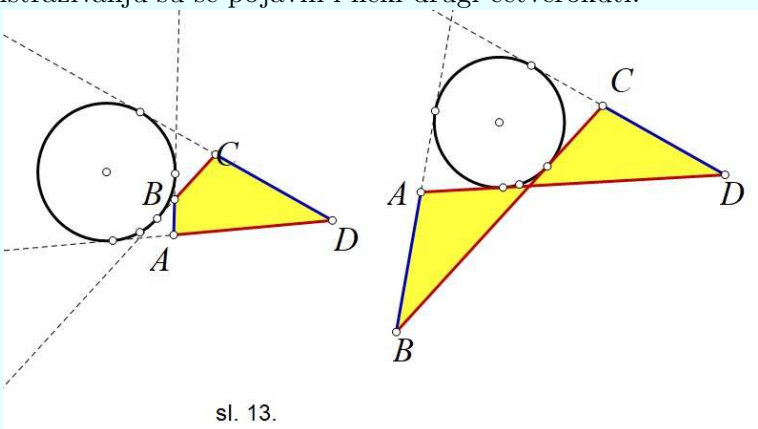
gdje su a, b, c, d redom duljine stranica, a $|EF|$ udaljenost dirališta upisanih kružnica trokutima s triangulirajućom dijagonalom.

Provjeru i dokaz ostavljamo vam za vježbu.

Na *Geometrijskoj radionici* koja je održana od 27. – 29. prosinca 2000. godine u Zagrebu pokazali smo kako smo računalni program *Geometer's Sketchpad* uporabili pri istraživanju tangencijalnih četverokuta. To što smo "vidjeli" da nešto vrijedi olakšalo nam je formalno matematičko dokazivanje. Program nam je pomogao otkriti veze do kojih naša matematička intuicija možda ne bi došla. Najviše nam je pomogao da preskočimo tradicionalni pristup tangencijalnim četverokutima i shvatimo da mogu biti i nekonveksni četverokuti i da postavimo sljedeću definiciju:

Četverokut je tangencijalan ako se u njega može upisati kružnica kojoj su pravci na kojima se nalaze stranice četverokuta tangente.

Pri istraživanju su se pojavili i neki drugi četverokuti.



sl. 13.

Ove četverokute nismo nazvali tangencijalnim. Razloga je bilo više. Osim što kružnica očito nije upisana, u ovim slučajevima karakterizacija tangencijalnih četverokuta pomoću zbroja duljina nasuprotnih stranica ne vrijedi. Međutim, "novi" četverokuti imaju zanimljiva svojstva povezana s duljinama njegovih stranica. To ostavljamo za neko drugo istraživanje.

Petar Mladinić: Poučak o propeleru

Američki zubar i samouki matematičar **Leon Bankoff** 1977. godine načinio je niz zadivljujućih otkrića u elementarnoj geometriji.

Izvor otkrića našao je u *poučku o propeleru* iz 1930. godine nepoznatog autora.

* * * * *

Razmotrimo sljedeći problem.

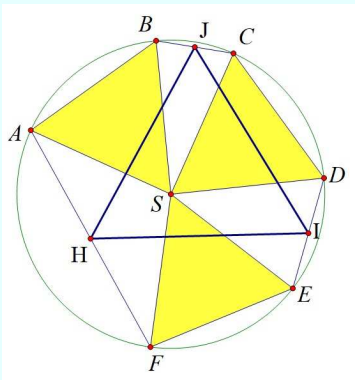
Problem. Zadana su tri sukladna jednakostranična trokuta sa zajedničkim vrhom.

a) Istražite kakav je trokut određen polovištima dužina koje određuju vrhovi susjednih trokuta.

** ** ** ** **

Rješavajući problema otkriva se sljedeći poučak. Ime je dobio jer podsjeća na propeler.

Poučak: *(Poučak o propeleru) Ako su dana tri jednakostranična sukladna trokuta ABS, CDS i EFS sa zajedničkim vrhom S, onda su polovišta dužina $\overline{BC}, \overline{DE}$ i $\overline{FA}$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.*

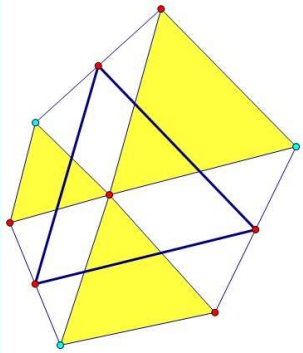


(Dokaz poučka ostavljamo čitatelju!)

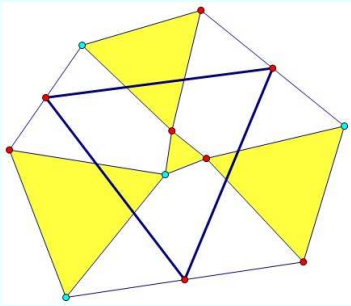
** ** ** ** **

b) "Napustimo" sukladnost jednakostraničnih trokuta! Trokuti su slični!

Što se u tom slučaju događa?



c) "Napustimo" i zajednički vrh! Neka je "vrh" sada novi jednakostranični trokut. Što se sad događa?



d) "Napustimo" jednakostraničnost i sukladnost trokuta! Trokuti su slični!

Razmotrimo dva slučaja:

- sa zajedničkim vrhom,
- sa zajedničkim sličnim trokutom kao "vrhom".

e) Pitanja za daljnje istraživanje:

- Moraju li krakovi propelera biti trokuti?
- Mogu li kvadrati biti krakovi propelera?
- Mogu li drugi likovi biti krakovi?
- Vrijedi li svojstvo propelera za sukladne likove?
- A slične likove?
- S vrhom ili "vrhom"?
- ...

Petar Mladinić: Zadatci za dokazivanje

Zadatci

U sljedećim zadatcima treba nacrtati sliku, istražiti zadano, otkriti neku zakonitost/svojstvo, uobličiti tvrdnju/otkriće i uvjerljivo argumentirati/dokazati je!

1. Stranice $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$ imaju redom polovišta F, G i H. Točka C je nožište okomice iz točke B na stranicu $\overline{AC}$.

2. Vrh C je vrh pravog kuta pravokutnog trokuta $\triangle ABC$. Točke D i E su na hipotenuzi takve da je $|BC| = |BD|$ i $|AC| = |AE|$. Točka F je nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AC}$, a točka G nožište okomice iz E na $\overline{BC}$.

3. Četverokut $ABCD$ je kvadrat. Simetrala kuta $\angle DBA$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki F. Pravac CK okomit je na $\overline{BF}$ i siječe $\overline{BD}$ u točki L te $\overline{AB}$ u R.

4. Zadani su trokut $\triangle ABC$ i bilo koji pravac iz A koji siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Okomica iz B siječe pravac AD u točki E, a okomica iz C u točki F. Točka R je polovište stranice $\overline{BC}$.

5. Zadan je trokut $\triangle ABC$ i simetrale vanjskih kutova s vrhovima B i C. Te simetrale se sijeku u točki D. Točka E je nožište okomice iz D na pravac AB.

6. Zadan je paralelogram $ABCD$. Vrhom A povučen je bilo koji pravac p. Iz vrhova B, C i D nacrtane su okomice na pravac p koje ga sijeku redom u točkama E, F i G.

7. Zadan je trokut $\triangle ABC$. Pravci AD i AE su okomiti na simetrale kutova β i γ. Nožišta ovih okomica su redom točke D i E, a sjecišta sa stranicom $\overline{BC}$ su točke F i G.

8. Zadan je jednakokračni trokut $\triangle ABC$ s kutom $\alpha = 120°$ nasuprot osnovice $\overline{BC}$. Točke D i E dijele osnovicu na tri dijela.

9. Zadan je jednakokračni trokut $\triangle ABC$ i točka D na osnovici $\overline{CD}$. Okomica na $\overline{BC}$ iz D pravce AB i CA redom siječe u točkama E i F.

10. Zadan je trokut $\triangle ABC$ i njegovo težište T. Težištem T nacrta se bilo koji pravac p. Iz vrhova A, B i C nacrtane su okomice na p koje ga sijeku redom u točkama P, Q i R.

11. Točka O je središte opisane kružnice jednakostraničnom trokutu $\triangle ABC$. U nekoj točki P kružnice nacrta se tangenta t. Nožišta okomica iz vrhova A, B i C na tangentu t redom su točke D, E i F.

12. Nožišta visina trokuta $\triangle ABC$ redom su točke D, E i F. Svaka visina dijeli trokut $\triangle ABC$ na dva manja trokuta u koje su upisane kružnice.

13. Točke D, E i F su nožišta visina $\overline{AD}, \overline{BE}$ i $\overline{CF}$ trokuta $\triangle ABC$. Točke P, Q i R su redom polovišta stranica trokuta $\triangle DEF$. Iz P, Q i R nacrtaju se redom okomice na stranice $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$.

14. Zadana je dužina $\overline{AB}$ i jedna njezina točka C.Iznad dužine nacrtaju se jednakostranični trokuti $\triangle ACF$ i $\triangle BCE$, a ispod jednakostranični trokut $\triangle ABD$. Središta upisanih im kružnica redom su točke L, N i M.

15. Što je geometrijsko mjesto točaka (lokus) čiji je zbroj udaljenosti od dva pravca koji se sijeku jednak zadanoj udaljenosti?

16. Zadan je četverokut $ABCD$ i točka P u njegovoj unutrašnjosti takva da je zbroj kvadrata udaljenosti od P do vrhova četverokuta konstantan. Što je geometrijsko mjesto točaka (lokus)? Možeš li naći središte lokusa?

17. Zadana je fiksna kružnica k i dvije fiksne točke A i B. Iz A se nacrta pravac p koji siječe kružnicu u točki C. Na pravcu p nacrta se točka D tako da je $|AC| = |CD|$. Točka E je polovište dužine $\overline{AB}$. Točka M je sjecište pravaca BC i DE. Što je geometrijsko mjesto točaka (lokus) M? Možeš li naći središte lokusa?

18. U zadani je šiljastokutni trokut $\triangle ABC$ upisan trokut $\triangle UVZ$ tako da su mu vrhovi na stranicama zadanog. Kad trokut $\triangle UVZ$ ima najmanji opseg?

19. U zadanom šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ nađite točku P takvu da joj je zbroj udaljenosti od vrhova trokuta najmanji. Koliki je taj zbroj?

20. Središta n kružnica polumjera r su vrhovi n-terokuta.

21. U veliku kružnicu promjera $2r$ upisani su veliki i mali jednakostranični trokut $\triangle DEF$ i $\triangle ABC$ tako da je točka A polovište jedne stranice velikog trokuta.

22. Dvije kružnice polumjera r diraju se međusobno i dodiruju s iste strane pravac p. Kružnice i pravac dodiruje kvadrat tako da su mu dva vrha na kružnicama, a ostala dva vrha na pravcu.

23. Kružnica promjera $2r$ podijeljena je na 5 dijelova jednake površine. Četiri rubna dijela omeđena su lukom kružnice, jednom stranicom kvadrata s njezinim produžetkom te produžetkom stranice kvadrata.

24. Dvije kružnice polumjera r upisane su u kvadrat tako da se dodiruju i da dodiruju dvije nasuprotne stranice kvadrata. Dvije manje kružnice polumjera t upisane su u kvadrat tako da dodiruju nasuprotne stranice i obje veće kružnice. Kvadrat je upisan u veći pravokutni trokut tako da mu dvije stranice leže na katetama pravokutnog trokuta, a vrh na hipotenuzi. Dvije nove kružnice polumjera R i r upisane su u malim pravokutnim trokutima izvan kvadrata.

25. Četiri kružnice polumjera b dodiruju s vanjske strane stranice kvadrata. Četiri nove kružnice polumjera a dodiruju dvije kružnice i prolaze jednim vrhom kvadrata.

26. Trokut $\triangle ABC$ upisan je u kružnicu promjera $2r$. Kolika je duljina visine $\overline{CH}$ trokuta?

27. Tri kvadrata duljina stranica a, c i d dodiruju pravac p i svaki od njih ima jedan vrh zajednički s kvadratom duljine stranice b (koji ne dodiruje pravac) te s još jednim od danih kvadrata.

28. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Polumjeri upisanih kružnica trokutima $\triangle DAB, \triangle ABC, \triangle BCD$ i $\triangle CDA$ redom su r_A, r_B, r_C i r_D.

29. Zadan je jednakokračni trokut $\triangle ABC$. Dvije dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CH}$ dijele trokut na tri manja trokuta u koji je svakom upisana kružnica polumjera r. Kolike su stranice trokuta?

30. Četverokut $ABCD$ opisan je zadanoj kružnici polumjera r.

31. Vrijedi li poučak o tangencijalnom četverokutu za nekonveksne četverokute?

32. Zadan je pravokutnik $ABCD$ s duljinama stranica a i b. U trokute $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ upisane su kružnice.

33. Zadan je četverokut $ABCD$. U trokute $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ upisane su kružnice.

Rješenja

Zadatci su uzeti iz:

a) Aref, Wernick: *Problems & solutions in Euclidean geometry* (zadatci od 1. do 17.)

b) Coxteter: *Introduction to Geometry* (zadatci 18. i 19.)

c) Fukagava, Rothman: *Sacred mathematics: Japanese temple geometry* (zadatci od 20. do 29.)

1. 1.4.
2. 1.6.
3. 1.9.
4. 1.11.
5. 1.15.
6. 1.17.
7. 1.18.
8. 1.23.
9. 1.28.
10. 1.29.
11. 3.1.
12. 3.7.
13. 3.8.
14. 4.9.
15. 5.1.
16. 5.2.
17. 5.9.
18. Fagnanov problem, str. 20.
19. Fermatov problem, str. 22., – Fermatova točka –
20. problem 4, str. 94.

21. problem 6, str. 95.
22. problem 7, str. 95.
23. problem 21, str. 104.
24. problem 22, str. 104.
25. problem 28, str. 108.
26. problem 29, str. 109.
27. problem 6, str. 149.
28. problem 1, str. 192.
29. problem 3, str. 1985.
30. poučak o tangencijalnom četverokutu
31. da, ako uzmemo da produžetci stranica dodiruju kružnicu
32. ako se kružnice dodiruju, onda je to tangencijalni četverokut

Petar Mladinić: 101 točka presjeka

U elementarnoj geometriji vrlo su poznate četiri karakteristične točke trokuta: središte opisane kružnice (presjek simetrala stranica), središte upisane kružnice (presjek simetrala kuta), ortocentar (sjecište visina) i težište (presjek težišnica). Sve se te točke dobivaju kao sjecište triju odgovarajućih pravaca.

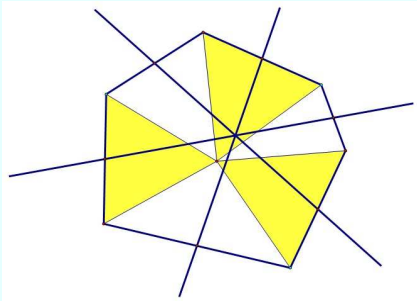
U matematici tri ili više pravaca koji prolaze istom točkom nazivamo *konkurentnim pravcima*.

Mi, u prvom redu, želimo otkriti/otkrivati takve točke. Nakon uvjerljive argumentacije da je otkriće istinito čitatelje pozivamo da otkriće i dokažu.

Nezamjenjiv alat u našim istraživanjima i otkrićima zakonitosti/pravilnosti koji nam daje obilje uvjerljivih argumenata je software *Sketchpad*. Ovdje ćemo otkrivati neke geometrijske pravilnosti/zakonitosti/poučke. Na sličan se način mogu istraživati i otkrivati mnoge druge negeometrijske pravilnosti.

Pogledajmo sljedeći primjer.

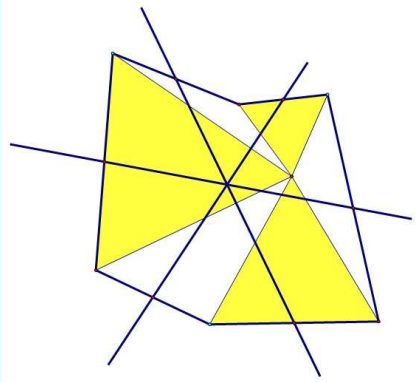
Primjer: *Zadana su tri sukladna jednakostranična trokuta sa zajedničkim vrhom Spojimo li susjedne vrhove susjednih trokuta dobit ćemo šesterokut. Konstruirajmo polovišta stranica tog šesterokuta. Spojimo nasuprotna polovišta. Što možemo uočiti?*



Lako se uočava da su spojnice tih polovišta konkurentni pravci i da smo otkrili jednu od 101 točke presjeka. Mijenjanjem međusobnih položaja trokuta pravci ostaju konkurentni i tako nam učvršćuju uvjerenje da to vrijedi uvijek.

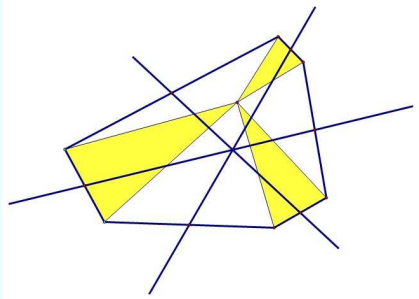
Upustimo se u istraživanje općenitijih slučajeva.

Ako umjesto sukladnosti trokuta zahtijevamo sličnost jednakostraničnih trokuta, hoćemo li dobiti opet konkurentne pravce?



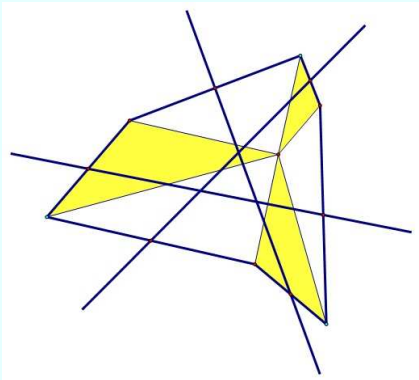
Vidimo da smo opet dobili konkurentne pravce tj. da smo dobili novu točku presjeka.

I dalje mijenjajmo uvjete. Istražimo slučaj kad su trokuti jednakokračni i sukladni, a zatim i slični. Dobivamo li i dalje konkurentne pravce?



Sketchpad nam i dalje daje dovoljno argumenata da vjerujemo da su pravci konkurentni.

I na kraju, istražimo slučaj kad su zadana tri raznostranična i međusobno slična trokuta.



Sketchpad nam pokazuje da te spojnice nasuprotnih polovišta nisu

konkurentni pravci.

Zadatci

1. Istražite slučaj kad su zadana tri kvadrata sa zajedničkim vrhom. Postoji li neka konkurentna točka tj. postoje li konkurentni pravci? Možete li ih otkriti?

2. Nacrtajte bilo koji četverokut $ABCD$ i redom polovišta E, F, G i H njegovih stranica. Kakav je četverokut $EFGH$?

3. Nacrtajte trokut $\triangle ABC$ i polovišta M i N dviju njegovih stranica. Možete li uočiti neku pravilnost?

4. Nacrtajte trapez $ABCD$ i polovišta M i N njegovih krakova. Možete li uočiti neku pravilnost?

5. Nacrtajte kružnicu k, jedan obodni kut i njemu pripadni središnji kut. Možete li uočiti neku pravilnost?

   Što možete zaključiti ako je vrh kuta izvan kruga? A što ako je u krugu?

6. Nacrtajte tangencijalni četverokut. Možete li uočiti neku pravilnost?

7. Nacrtajte tetivni četverokut. Možete li uočiti neku pravilnost?

8. Nacrtajte dva pravca koja se sijeku i presijecite ih s dva međusobno paralelna pravca. Što možete uočiti?

Napomena. U zadatcima mjerite kutove i dužine!

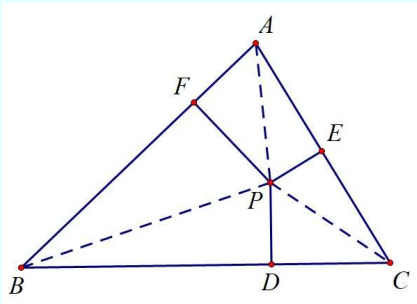
Petar Mladinić: Točka u trokutu

U ovom članku razmotrit ćemo nekoliko primjera i svojstava točaka u trokutu. Takvih zanimljivih točaka ima veliki broj. S primjerima koje ovdje razmatramo želimo čitatelje potaknuti da i sami istraže/pronađu neku "novu" točku.

*****

Točka u trokutu

Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ i točka P unutar njega. Točku P ortogonalno projeciramo redom na stranice $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Dobivamo točke D, E i F (v. sl.).



Dokažimo da vrijedi

$$|BD|^2 + |CE|^2 + |AF|^2 = |DC|^2 + |EA|^2 + |FB|^2. \tag{8.1}$$

Za pravokutni trokut PDB vrijedi

$$|BD|^2 + |PD|^2 = |PB|^2,$$

a za trokut PBF vrijedi

$$|FB|^2 + |PF|^2 = |PB|^2.$$

Iz ove dvije tvrdnje slijedi da je

$$|BD|^2 + |PD|^2 = |FB|^2 + |PF|^2. \tag{8.2}$$

Na sličan se način iz trokuta PDC i trokuta PEC dobiva da je

$$|DC|^2 + |PD|^2 = |CE|^2 + |PE|^2, \tag{8.3}$$

a iz trokuta AEP i trokuta AFP

$$|EA|^2 + |PE|^2 = |AF|^2 + |PF|^2. \tag{8.4}$$

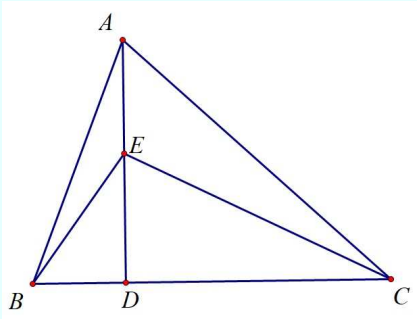
Oduzmemo li (8.3) i (8.4) od (8.2) dobit ćemo

$$|BD|^2 + |CE|^2 + |AF|^2 = |DC|^2 + |EA|^2 + |FB|^2.$$

Za vježbu razmotrite slučaj kad je točka P izvan trokuta. Vrijedi li i tada ova tvrdnja?

Točka na visini trokuta

Zadan je trokut $\triangle ABC$ i točka E na njegovoj visini $\overline{AD}$ (v. sl.).



Dokažimo da vrijedi

$$|AC|^2 - |CE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2.$$

U pravokutnom trokutu ADC vrijedi

$$|CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2,$$

a u pravokutnom trokutu EDC vrijedi

$$|CD|^2 + |ED|^2 = |CE|^2.$$

Oduzmemo li drugu tvrdnju od prve dobit ćemo

$$|AD|^2 - |ED|^2 \quad = \quad |AC|^2 - |CE|^2. \tag{8.5}$$

Na sličan način iz ADB dobiva se da vrijedi

$$|DB|^2 + |AD|^2 = |AB|^2,$$

a iz trokuta EDB dobiva se

$$|DB|^2 + |ED|^2 = |BE|^2.$$

Iz ove dvije tvrdnje slijedi da je istinita tvrdnja

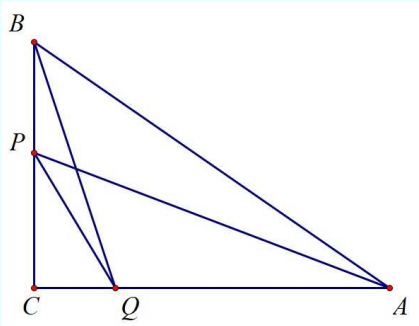
$$|AD|^2 - |ED|^2 \quad = \quad |AB|^2 - |BE|^2. \tag{8.6}$$

Iz (8.5) i (8.6) slijedi da je istinita tvrdnja

$$|AC|^2 - |CE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2.$$

Točke na katetama pravokutnog trokuta

Zadan je pravokutni trokut $\triangle ABC$ s katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Neka je točka P bilo koja točka katete $\overline{BC}$, a točka Q katete $\overline{AC}$ (v. sl.).



Dokažimo da vrijedi

$$|BQ|^2 + |PA|^2 = |AB|^2 + |PQ|^2.$$

Za pravokutni trokut BCQ vrijedi

$$|BQ|^2 = |BC|^2 + |CQ|^2,$$

a za trokut ACP vrijedi

$$|AP|^2 = |PC|^2 + |CA|^2.$$

Zbrojimo li ove dvije jednakosti dobit ćemo

$$|BQ|^2 + |AP|^2 = (|BC|^2 + |CA|^2) + (|CQ|^2 + |PC|^2),$$

tj.

$$|BQ|^2 + |PA|^2 = |AB|^2 + |PQ|^2.$$

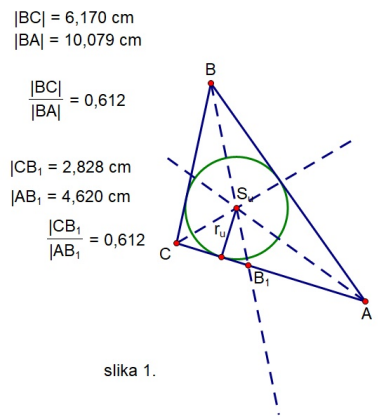
Jelene Gusić i Petar Mladinić: Pripisane kružnice

U ovom članku razmotrit ćemo tangencijalnom poligonu pripisane kružnice. Najveći dio navedenih činjenica je potpuno izvoran. Posebice treba naglasiti nezamjenjivu ulogu u našem "istraživanju" pripisanih kružnica *Sketchpadom.*

* * *

Trokut

S upisanom kružnicom, kao kružnicom koja dodiruje sve tri stranice trokuta, susrećemo se već u petom razredu osnovne škole.



slika 1.

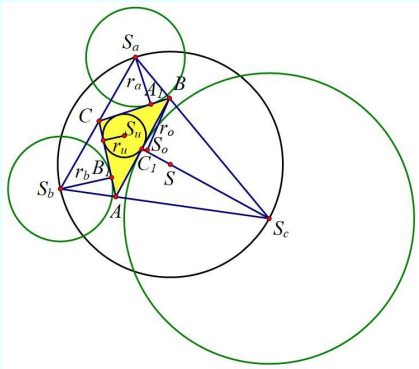
Najprije naučimo konstruirati njezino središte, a potom i samu kružnicu. Poslije saznajemo i neka svojstva vezana uz nju, primjerice, vezu polumjera upisane kružnice i površine trokuta, $p = r_u \cdot s$, vezu točke u kojoj simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu:

Omjer u kojemu simetrala kuta dijeli stranicu jednak je omjeru preostalih stranica trokuta,

tj. poučak o simetrali kuta trokuta i slično. Pripisane kružnice gotovo i ne susrećemo. S postojanjem takvih kružnica najčešće se suočimo tek pri analitičkom rješavanju nekih zadataka, kada se pojavljuju "dodatna" rješenja koja treba interpretirati.

Do pojma pripisane kružnice jednostavno je doći ako zahtjev da kružnica dodiruje *sve tri stranice trokuta* zamijenimo zahtjevom da kružnica dodiruje *tri pravca na kojima se stranice trokuta nalaze.* Lako se vidi da osim upisane kružnice postoje još tri kružnice koje zadovoljavaju gornji uvjet. Naziv *pripisane kružnice* je potpuno prihvatljiv.

Poznata su neka svojstva pripisanih kružnica.



Uz uobičajene oznake za elemente trokuta $\triangle ABC$: stranice a, b, c, polumjer opisane kružnice r_o, polumjer upisane kružnice r_u, središte opisane kružnice S_o, središte upisane kružnice S_u, poluopseg s, površina trokuta $p(\triangle ABC)$, potom oznake za središte i polumjer pripisane kružnice koja dodiruje stranicu a: S_a i r_a, stranicu b: S_b i r_b i stranicu c: S_c i r_c, te oznaku S za središte kružnice opisane trokutu $S_aS_bS_c$ ta svojstva su:

a) $r_a + r_b + r_c = 4r_o + r_u$,

b) $\dfrac{1}{r_u} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$,

c) $r_a = \dfrac{p(\triangle ABC)}{s-a}$,

d) $|S_uS_a|^2 = 4r_o(r_a - r_u)$,

e) $|SS_a| = 2r_o$,

f) $p(\triangle S_aS_bS_c) = 2sr_o$,

g) $|S_oS_a|^2 = r_o^2 + 2r_or_a$,

h) $|S_oS_u|^2 + |S_oS_a|^2 + |S_oS_b|^2 + |S_oS_c|^2 = 3(2r_o)^2$,

i) *Točka dodira pripisane kružnice i nasuprotni vrh trokuta raspolavljaju opseg trokuta.*

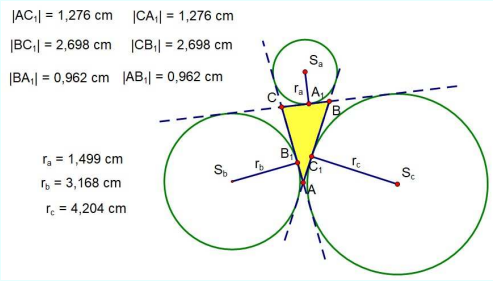
j) *Stranice trokuta $S_aS_bS_c$ okomite su na simetrale kutova unutar trokuta $\triangle ABC$.*

Istražujući pomoću *Sketchpada* poneka od ovih svojstava možemo "otkriti", a možemo doći i do novih.

Gledajući trokutu pripisanu kružnicu i njezino diralište na stranici, "nameće" nam se pitanje: *Znamo li neku sličnu situaciju u kojoj je posebno istaknuta točka na stranici trokuta i koja ima neko "dobro" svojstvo?* i

odgovor: *Možda je to simetrala kuta unutar trokuta i točka u kojoj ona siječe stranicu?!* Možemo li otkriti nešto slično poučku o simetrali unutarnjeg kuta trokuta? Nešto o omjerima?

Kako započeti istraživanje? Logično je pokušati istražiti omjere koje određuju dodirne točke pripisanih kružnica i trokuta. Stoga treba odrediti duljine odsječaka, a kako očekujemo da će se u nekoj od relacija pojaviti i polumjeri pripisanih kružnica treba odrediti i njih.



Prvo što se uočava jest jednakost odsječaka:

$$|AC_1| = |A_1C|, \quad |BC_1| = |B_1C|, \quad |BA_1| = |B_1A|$$

Ovo je jednostavno dokazati koristeći potenciju točke s obzirom na kružnicu:

$$|AC_1| = |AV| = |CV| - b = |CT| - b = a + |BT| - b = |CA_1| + |A_1B| + |BC_1| - b = |CA_1| + |B_1W| + |BC_1| - b = |CA_1| + |AW| - |AC_1| - b = |CA_1| + |AZ| - |AC_1| - b = |CA_1| + b + |CZ| - |AC_1| - b = |CA_1| + |CA_1| - |AC_1|$$

Iz jednakosti odsječaka dobivamo poznatu tvrdnju:

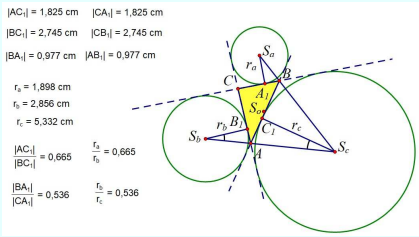
Točka dodira pripisane kružnice i nasuprotni vrh trokuta raspolavljaju opseg trokuta.

Međutim, uočavaju se još neke veze:

Omjeri odsječaka na stranici jednaki su omjerima polumjera pripisanih kružnica.

Za stranicu c ova veza glasi:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{r_a}{r_b}.$$



I ovo je jednostavno dokazati, primjerice: zbog $\triangle AC_1S_c \sim \triangle AB_1S_b$ vrijedi $\dfrac{|AC_1|}{r_c} = \dfrac{|AB_1|}{r_b}$, a zbog $\triangle BC_1S_c \sim \triangle BA_1S_a$ vrijedi $\dfrac{|BC_1|}{r_c} = \dfrac{|BA_1|}{r_a}$. Iz ovih dviju relacija, koristeći jednakost odsječaka $|AB_1| = |A_1B|$, dobivamo traženi odnos.

Pri proučavanju pripisanih kružnica uočava se trokut $S_aS_bS_c$, takozvani *komplementarni trokut* trokutu $\triangle ABC$. Na prvi pogled pojavljuju se neki zanimljivi kutovi. Vidi se, a lako se i izračuna:

Stranice trokuta $S_aS_bS_c$ okomite su na simetrale kutova unutar trokuta $\triangle ABC$.

Kut u vrhu S_a trokuta $S_aS_bS_c$ jednak je $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, kut u vrhu S_b jednak je $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, a kut u vrhu S_c jednak je $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Uočavaju se i zanimljivi kutovi kad vrhove komplementarnog trokuta povežemo sa središtem upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ i odgovarajućim diralištem.

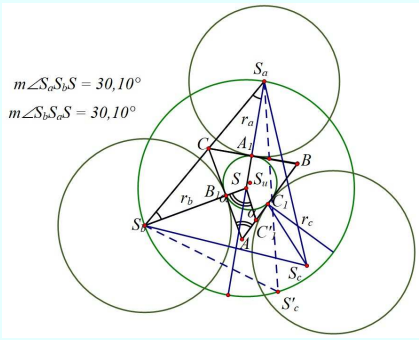
"Rubni" dijelovi kuta, u svakom vrhu, međusobno su jednakih mjera. Štoviše, ti su kutovi u dva vrha jednaki. I ovu je vezu jednostavno provjeriti: izračunavanjem kutova dobivamo da su četiri kuta jednakih mjera jednaki polovici mjere najmanjeg kuta trokuta $\triangle ABC$, a da su preostala dva kuta jednaka polovici sljedećeg po veličini kuta trokuta $\triangle ABC$.

Također je jednostavno uočiti, a nakon toga i provjeriti, da među kutovima koje čine okomice iz vrhova komplementarnog trokuta na stranice trokuta $\triangle ABC$ sa stranicama komplementarnog trokuta ima istih. Kut određen stranicom $\overline{S_bS_c}$ jednak je $\dfrac{\alpha}{2}$, stranicom $\overline{S_cS_a}$ jednak je $\dfrac{\beta}{2}$, dok je kut sa stranicom $\overline{S_aS_b}$ jednak $\dfrac{\gamma}{2}$.

Nameće se pitanje: *Prolaze li možda te okomice jednom točkom i ako da kakva je to točka?* Ukoliko je točka jedinstvena onda će to biti središte opisane kružnice trokutu $S_aS_bS_c$. Pokažimo to!

Neka se okomice S_bB_1 i S_aA_1 sijeku u točki S. Zbog jednakosti kutova uz stranicu $\overline{S_aS_b}$ zaključujemo da kružnica sa središtem u S koja prolazi točkom S_a prolazi i točkom S_b. Pokažimo da je i točka S_c na toj kružnici.

Neka je SC_1' okomica na $\overline{AB}$ i neka siječe kružnicu u točki S_c'. Kako su mjere obodnih kutova $S_bS_c'S_a$ i $S_bS_aS_c'$ jednake $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, odnosno $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, to su prema poučku o sukladnosti trokuta (KSK) trokuti $S_bS_aS_c$ i $S_bS_aS_c'$ sukladni, pa je $S_c' = S_c$. To znači da se okomice povučene iz središta pripisanih kružnica na odgovarajuće stranice sijeku u središtu kružnice koja prolazi tim središtima.



Dakle, imamo novu "karakterizaciju" središta trokutu opisane kružnice:

Središte trokutu opisane kružnice nalazi se u sjecištu okomica iz vrhova komplementarnog trokuta na odgovarajuće stranice zadanog trokuta.

Jedinstvenost točke sjecišta podsjeća na *Cevain poučak*[1]. Jednakost odsječaka na stranicama trokuta $\triangle ABC$, ako ih povežemo, možemo zapisati ovako:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

"Prenesimo" to na komplementarni trokut. Spojimo li dodirne točke s vrhovima komplementarnog trokuta dobijemo na njegovim stranicama točke A_2, B_2, C_2. Tada, zbog jedinstvenosti točke S treba vrijediti i:

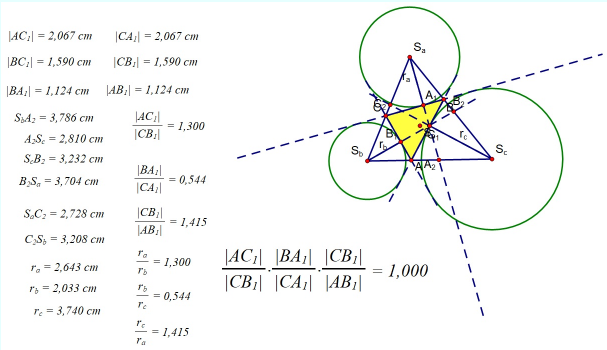
$$\frac{|S_bA_2|}{|A_2S_c|}\cdot\frac{|S_cB_2|}{|B_2S_a|}\cdot\frac{|S_aC_2|}{|C_2S_b|}=1.$$

Provjerimo dobiveni odnos *Sketchpadom*. Doista vrijedi!

[1] **Teorem:** *Neka su A_1, B_1, C_1 točke presjeka stranica trokuta $\triangle ABC$ i pravaca koji prolaze vrhovima A, B, C i točkom O unutar trokuta. Tada je*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

Ovaj poučak je 1678. godine dokazao **Giovanni Ceva** (1648.-1734.).

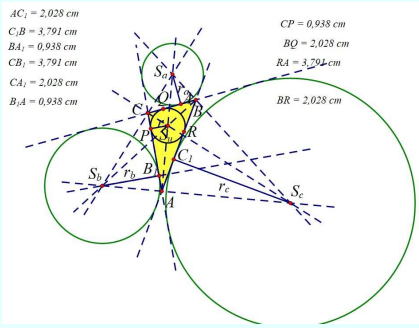


Dakle, A_1, B_1, C_1 su ortogonalne projekcije točke S na stranice trokuta $\triangle ABC$ i "naslijedile" su Cevaino svojstvo.

Uočavamo još jednu zanimljivu jednakost duljina:

Udaljenost točke dodira upisane kružnice do jednog vrha jednaka je udaljenosti dodira pripisane kružnice do drugog vrha iste stranice,
pa je:

$$|AC_1| = |BR|, \quad |AB_1| = |CP| \quad |CA_1| = |BQ|.$$



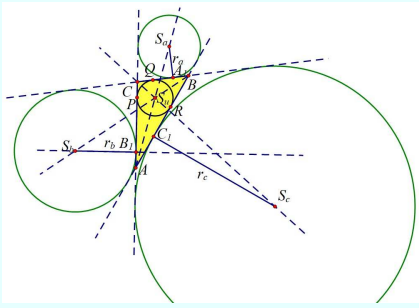
Pokažimo da je $|AB_1| = |CP|$:

U četverokutu S_bAS_uC kutovi S_bCS_u i S_bAS_u su pravi, pa se četverokutu može opisati kružnica. Njezino središte označimo s U. Ako izračunamo kutove trokuta S_bS_uC, PCS_u, S_bAS_u i S_bAB_1, pa izrazimo stranice $\overline{AB_1}$ i $\overline{CP}$ pomoću njih i polumjera r te kružnice, dobivamo da je duljina obiju dužina $2rcos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Koristeći jednakost odsječaka dobijemo odnos među polumjerima pripisane i upisane kružnice koji za polumjer r_a glasi:

$$r_a = \frac{r_u}{\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}},$$

odnosno konstrukciju pripisanih kružnica pomoću simetrala unutrašnjih kutova i točaka dodira upisane kružnice i stranica trokuta.



Krećući u istraživanje pripisanih kružnica znali smo da postoje (mada ih nismo morali eksplicitno znati) neke metričke relacije (kao što smo nabrojali u uvodu članka), ali i "nove" koje tek treba "otkriti/istražiti". Program *Dinamične geometrije – Sketchpad* omogućava otkrivanje veza koje bez njega možda ne bismo naslutili i navodi na otkrivanje razloga – dokazivanje zbog kojih otkriveno vrijedi. Ovo "otkrivanje" treba ponuditi/pripremiti učenicima kao najvredniji dio elementarne matematike.

Pokušajmo naznačiti skicu jednog takvog "istraživanja/otkrivanja" u kojem će učenici otkriti sve ovo naznačeno o pripisanim kružnicama (i vjerojatno još puno drugoga).

Zadatak 1. *Nacrtajte trokut. Upišite, opišite i pripišite mu kružnice. Provjerite svojstva od a) do j).*

Ovo je zadatak za zagrijavanje. Učenici će odrediti, izmjeriti i proanalizirati odnose velikog broja veličina. Mijenjajući položaj točaka zadanog trokuta uvjerit će se da se izmjerene veličine mijenjaju, ali svojstva od a) do j) ostaju nepromijenjena.

Na ovaj način učenici stiču samopouzdanje u svom istraživanju i razvijaju osjećaj za otkrivanje invarijanata.

Zadatak 2. *Nacrtajte trokut, njegove pripisane kružnice i njihova dirališta. Možete li naći neku zakonitost?*

Ovdje treba savjetovati učenicima da izmjere polumjere pripisanih kružnica i dužine koje dirališta određuju na svakoj stranici. Uz malo "igre" oni otkrivaju da su omjeri duljina dužina jednaki omjerima duljina polumjera pripisanih kružnica. (U kojem redoslijedu?)

I tako, korak po korak, učenici otkrivaju i za njih i za nastavnika nove činjenice. Tu nema recepta što će se otkriti. Ovdje dolazi do punog izražaja njihovo predznanje, iskustvo, maštovitost, kombinatornost, procjenjivanje i naslućivanje (eliminacija "sporednih" od "glavnih" činjenica) i, iznad svega, zaključivanje po analogiji (*Na što ovo podsjeća? Možete li se sjetiti sličnog svojstva, situacije, činjenice,...?*)

Ovo je najljepši i najteži dio za nastavnika. Jedni će otkrivati jedne činjenice, drugi druge. Razmjenjivat će "znanje" i na kraju će "svi otkriti sve".

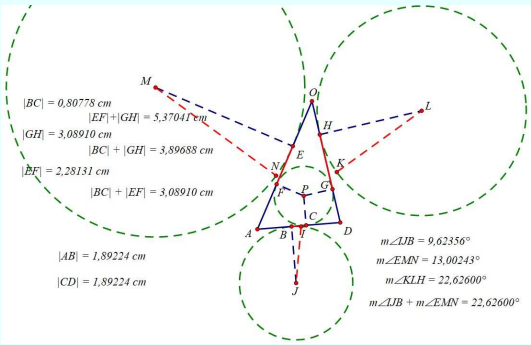
Nastavnik tada mora, zajedno s učenicima, rezimirati sva njihova otkrića, te odlučiti koja se od naslućenih/otkrivenih činjenica moraju dokazati (jer "uvjerljivost" *Dinamične geometrije* i *Sketchpada* nije dokaz!), a koja se neće dokazivati (jer su trivijalna ili preteška za učenički uzrast).

Evo dva zadatka i za čitatelja. Rješavajući ove zadatke steći ćete uvid u poteškoće kojima su izloženi učenici, a i iskustvo nužno za ovakav način poučavanja matematike.

Zadatak 3. *Osmislite skup pitanja kojima ćete "navesti" učenike na otkriće slijedeće činjenice (v. sl.):*

`Na svakoj stranici trokuta "srednji dio" je dužina određena diralištima upisane i pripisane kružnice. Zbroj duljina dviju manjih "srednjih" dužina jednak je duljini veće "srednje" dužine.`

Dokažite ovo "otkriće"!



Neka je trokut pozitivno orijentiran, tj. neka je obilazak vrhova trokuta suprotan obilasku kazaljke sata.

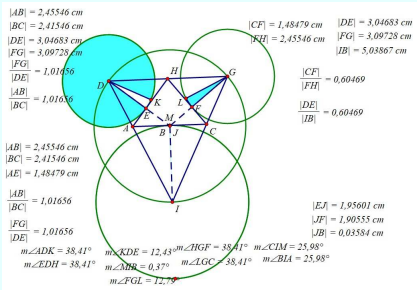
Uvedimo "predznak" ovim dužinama tako da imaju "pozitivnu duljinu" u slučaju da se diralište pripisane kružnice nalazi na stranici ispred dirališta upisane kružnice, a "negativnu duljinu" u slučaju kad je diralište upisane ispred dirališta pripisane kružnice.

Ovo "otkriće" možemo tada izreći i ovako:

Zbroj duljina dijelova stranica trokuta određenih diralištima pripisanih i upisane kružnice jednak je nuli.

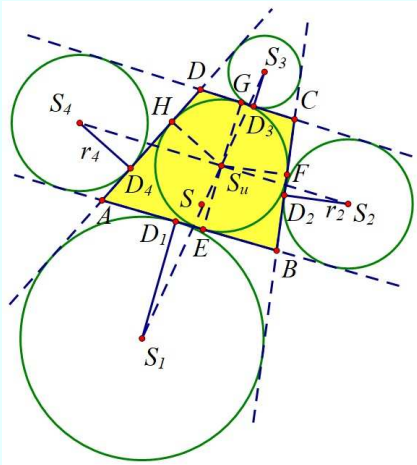
Slično "srednjoj dužini" možemo nazvati i "srednji kut". To je kut s vrhom u središtu pripisane kružnice, a krakovi prolaze diralištem pripisane kružnice i središtem upisane kružnice.

Zadatak 4. *Osmislite skup pitanja kojima ćete "navesti" učenike na otkriće činjenice o "srednjim kutovima" (v. sl.) koja je analogna činjenici iz zadatka 3. Dokažite ovo "otkriće"!*



Četverokut

Nastavimo s našim istraživanjem pripisanih kružnica. Na redu je tangencijalni četverokut.

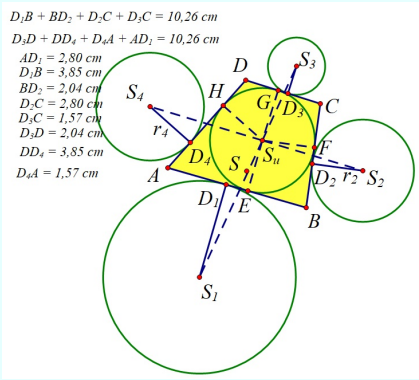


Ovdje treba redefinirati pojam pripisane kružnice i reći da *četverokutu je pripisana kružnica ona kružnica koja s vanjske strane dodiruje stranicu i pravce na kojima leže susjedne dvije stranice.* Ova definicija vrijedi za svaki tangencijalni poligon!

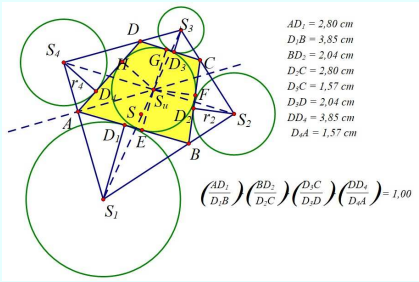
Koje od "otkrivenih" činjenica vrijede i za tangencijalni četverokut?

Nakon malog istraživanja otkrit ćemo da vrijede svojstva:

- *Točke dodira pripisanih kružnica na nasuprotnim stranicama raspolavljaju opseg četverokuta.*



- *Stranice četverokuta $S_1S_2S_3S_4$ okomite su na simetrale (unutrašnjih) kutova četverokuta $ABCD$.*



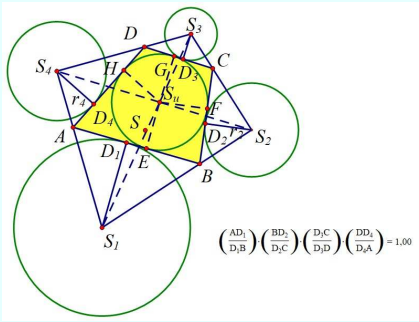
- *Odsječci koje na stranicama određuju dirališta pripisanih kružnica u parovima imaju jednake duljine.*

$|AD_1| = |CD_2|$, $|BD_1| = |DD_4|$, $|BD_2| = |DD_3|$, $|CD_3| = |AD_4|$.
(Dokaz: uporabite potenciju točke s obzirom na kružnicu.)

Jednakost odsječaka na stranicama četverokuta $ABCD$, ako ih povežemo, možemo zapisati ovako:

$$\frac{|AD_1|}{|D_1B|} \cdot \frac{|BD_2|}{|D_2C|} \cdot \frac{|CD_3|}{|D_3D|} \cdot \frac{|DD_4|}{|D_4A|} = 1.$$

- *Omjeri polumjera pripisanih kružnica jednaki su umnošku omjera duljina odsječaka na preostalim stranicama.*



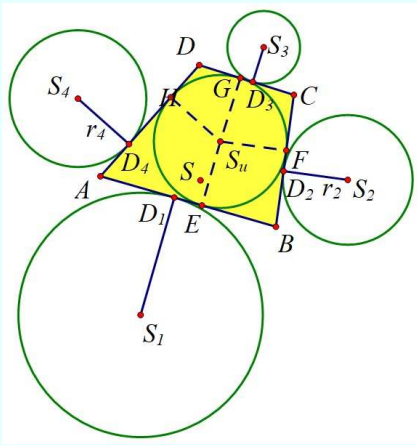
Za polumjere r_2 i r_4 ova veza glasi: $\dfrac{|AD_1|}{|BD_1|} \cdot \dfrac{|DD_3|}{|CD_3|} = \dfrac{r_2}{r_4}$. Ako tvrdnju napišemo u obliku:

$$\frac{|AD_1|}{|AD_3|} \cdot \frac{|BD_2|}{|BD_1|} = \frac{r_2}{r_4}$$

moći ćemo je generalizirati za n–terokute. Tvrdnja vrijedi jer iz $\triangle S_1D_1B \sim \triangle S_2D_2B$ slijedi $\dfrac{r_1}{|D_1B|} = \dfrac{r_2}{|BD_2|}$, a iz $\triangle S_1D_1A \sim \triangle S_4D_4A$ slijedi $\dfrac{r_1}{|D_1A|} = \dfrac{r_4}{|AD_4|}$. Iz ovih dviju relacija dobivamo traženi odnos.

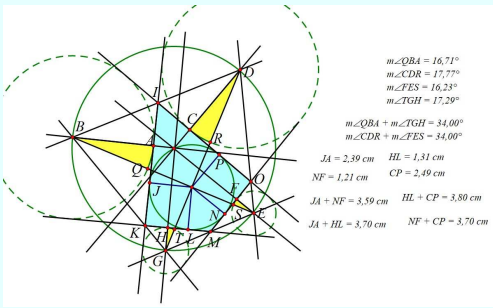
- *Udaljenost točke dodira upisane kružnice do jednog vrha jednaka je udaljenosti dodira pripisane kružnice do drugog vrha iste stranice*, pa je:

$$|AD_1| = |BE|, \quad |BD_2| = |CF|, \quad |CC_3| = |DG|, \quad |DD_4| = |AH|.$$



Dokaz je identičan onome za trokut!

- *Na svakoj stranici četverokuta "srednji dio" je dužina određena diralištima upisane i pripisane kružnice. Neka te dužine imaju "pozitivnu" ili "negativnu" duljinu kao u slučaju trokuta. Zbroj duljina "srednjih dijelova" jednak je* 0.



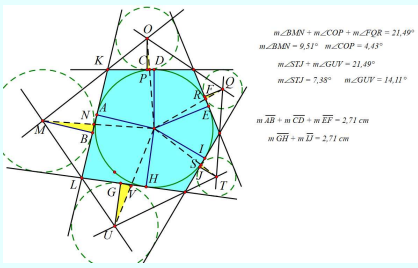
- *Komplementarni četverokut $S_1S_2S_3S_4$ ima opisanu kružnicu.*

- *"Srednji kut" komplementarnog četverokuta je kut s vrhom u središtu pripisane kružnice čiji krakovi prolaze diralištem pripisane kružnice i središtem upisane kružnice. Zbroj "orijentiranih srednjih kutova" komplementarnog četverokuta jednak je 0.*

Ovo naše istraživanje privedimo uobičajenom završetku, tj. istražimo poopćenje.

n–terokut

Nakon promatranja tangencijalnog peterokuta i šesterokuta možemo zaključiti slično.



Za tangencijalni n-terokut, $n \geq 5$ vrijedi:

- *Stranice n-terokuta čiji su vrhovi u središtima pripisanih kružnica okomite su na simetrale (unutrašnjih) kutova zadanog n-terokuta.*

- *Po dva odsječka koje na stranicama određuju dirališta pripisanih kružnica imaju jednake duljine.*

Odsječci nisu "pravilno" raspoređeni, pa tvrdnju o raspolavljanju opsega ne možemo proširiti.

(Dokaz: uporabite potenciju točke s obzirom na kružnicu.)

Jednakost odsječaka na stranicama n–terokuta, ako ih povežemo, možemo zapisati ovako:

$$\frac{|AD_1|}{|D_1B|} \cdot \frac{|BD_2|}{|D_2C|} \cdot \ldots \cdot \frac{|ND_n|}{|D_nA|} = 1.$$

- *Omjeri polumjera pripisanih kružnica jednaki su umnošku omjera duljina odsječaka na preostalim stranicama.*

Za polumjere r_2 i r_n ova veza glasi: $\dfrac{|AD_1|}{|AD_n|} \cdot \dfrac{|BD_2|}{|BD_1|} = \dfrac{r_2}{r_n}$.

- *Udaljenost točke dodira upisane kružnice do jednog vrha jednaka je udaljenosti dodira pripisane kružnice do drugog vrha iste stranice,*
  pa je:
- *Na svakoj stranici n-terokuta "srednji dio" je dužina određena diralištima upisane i pripisane kružnice. Neka duljine tih dužina imaju "pozitivan" ili "negativan" predznak kao kod trokuta. Zbroj duljina "srednjih dužina" jednak je* 0.
- *Zbroj "orijentiranih srednjih kutova" jednak je* 0.

Dokazi ovih svojstava analogni su već izloženim dokazima.

The Tangential or Circumscribed Quadrilateral

Michael de Villiers, RUMEUS, University of Stellenbosch profmd1@mweb.co.za

Though a substantial part of the South African geometry curriculum is spent on examining the properties of cyclic quadrilaterals, the study of quadrilaterals circumscribed around a circle are often neglected and ignored by teachers and textbooks. This is a pity as the mathematical content falls well within reach of high school learners and utilizes no geometry theorems that are not already in the curriculum. More over, having learners investigate such quadrilaterals provides opportunity for reinforcement of many previously learnt concepts.

A tangential or circumscribed quadrilateral can simply be defined as a quadrilateral with an incircle (and its sides therefore tangent to the incircle). This brings us to the first easy to prove theorem involving angle bisectors.

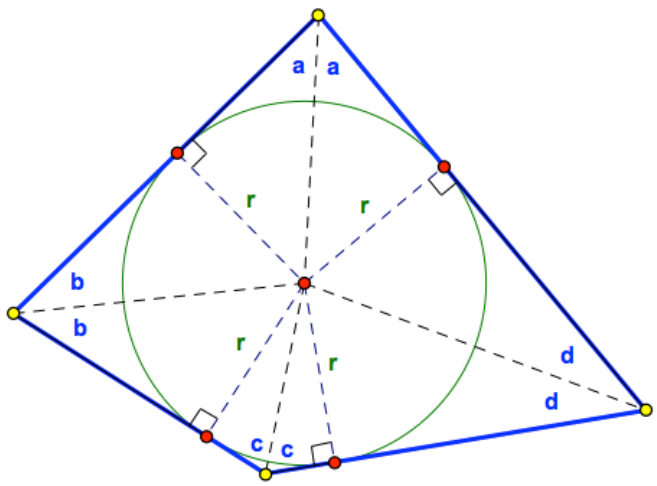


Figure 1: Concurrent angle bisectors

ANGLE BISECTORS

Theorem 1

The angle bisectors of any tangential quadrilateral are concurrent at the incentre of the quadrilateral (see Figure 1).

Proof

Since the incentre is equidistant from all four sides (radii of circle are perpendicular to sides), and each angle bisector is the locus of all points equidistant from its two adjacent sides, it follows that each angle bisector must pass through the incentre.

Conversely, one should also note that concurrency of the angle bisectors is a very useful condition for a quadrilateral to be circumscribed around or tangential to a circle. For example, for a quadrilateral to have an incircle, it must have a point that is equidistant from all the sides. Therefore, the four angle bisectors must meet in a single point, i.e. be concurrent.

However, we actually only need to have 3 angle bisectors of a quadrilateral concurrent to prove that it is tangential, as the 4th angle bisector will automatically be concurrent with the other three. A teacher may give learners a ready-made geometry sketch to discover and verify this for themselves by dragging the quadrilateral until 3 angle bisectors are concurrent, and then clicking on a button to view the 4th. An example sketch is available online at: http://dynamicmathematicslearning.com/concurrent-angle-bisectors.html

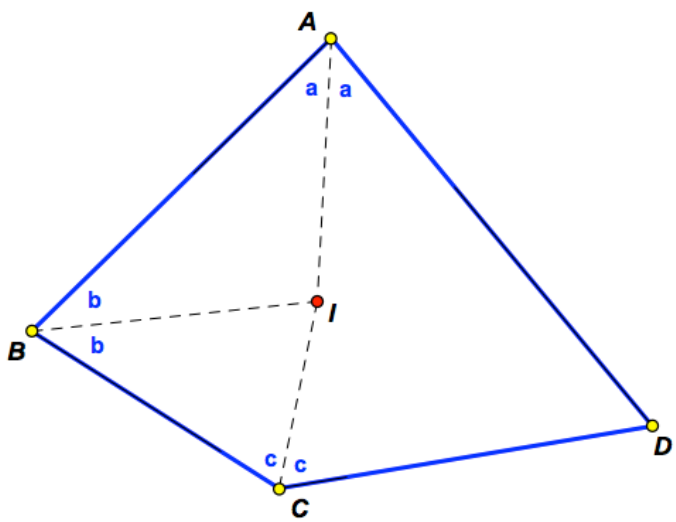


Figure 2: More on concurrent angle bisectors

Theorem 2

If any three angle bisectors of a quadrilateral are concurrent, then the fourth angle bisector is concurrent with them[1] (and hence, the quadrilateral is tangential).

Proof

Assume the angle bisectors at A, B and C of quadrilateral $ABCD$ are concurrent at I. From the properties of angle bisectors it follows that:

1) I is equidistant from sides AD and AB … lies on angle bisector of $\angle A$
2) I is equidistant from sides AB and BC … lies on angle bisector of $\angle B$
3) I is equidistant from sides BC and CD … lies on angle bisector of $\angle C$

$\Rightarrow$ I is equidistant from AD and CD … transitivity

$\Rightarrow$ I must lie on the angle bisector of $\angle D$, which completes the proof.

Note from the preceding two theorems it follows that a rhombus (and a square) are tangential since their diagonals are angle bisectors of opposite angles, and hence the incentre of the incircle would be located at the intersection of their diagonals.

Similarly, note that the axis of symmetry of a kite is an angle bisector of a pair of opposite angles. In addition, from the symmetry of the kite, it follows that the angle bisectors of the other two angles (which are reflections of each other) will intersect in a common point on the axis of symmetry. Hence, a kite also has an incircle with its incentre located on the axis of symmetry.

OPPOSITE SIDES

A prescribed theorem in the South African mathematics curriculum is the following: "A (convex) quadrilateral is cyclic, if and only if, the opposite angles are supplementary."

A different equivalent form of formulating this theorem is as follows: "A quadrilateral $ABCD$ is cyclic, if and only if, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$."

This alternative formulation highlights a remarkable *angle-side* duality between the cyclic quadrilateral and the tangential quadrilateral. Whereas a cyclic quadrilateral has the two sums of opposite *angles* equal, a similar theorem in terms of the two sums of opposite *sides* holds for a tangential quadrilateral.

[1] It is easy to generalize Theorems 1 and 2 to any n-gon where having $n - 1$ angle bisectors concurrent is sufficient to prove it is tangential. In the case of the triangle, Theorem 2 proves the concurrency of its angle bisectors.

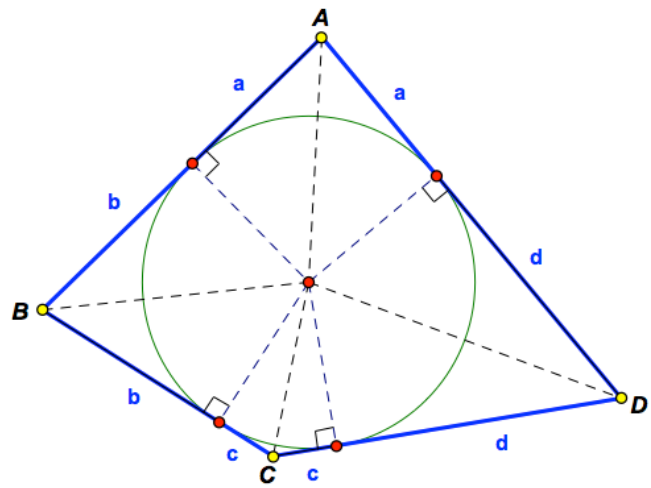


Figure 3: Tangential quadrilateral

Pitot's Theorem

A quadrilateral *ABCD* is tangential, if and only if, $AB + CD = BC + DA$[2].

Proof

The proof of the forward implication is quite straightforward. Assume *ABCD* is tangential as shown in Figure 3. Then labeling equal tangents from the vertices to the circle as indicated it follows that: $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$.

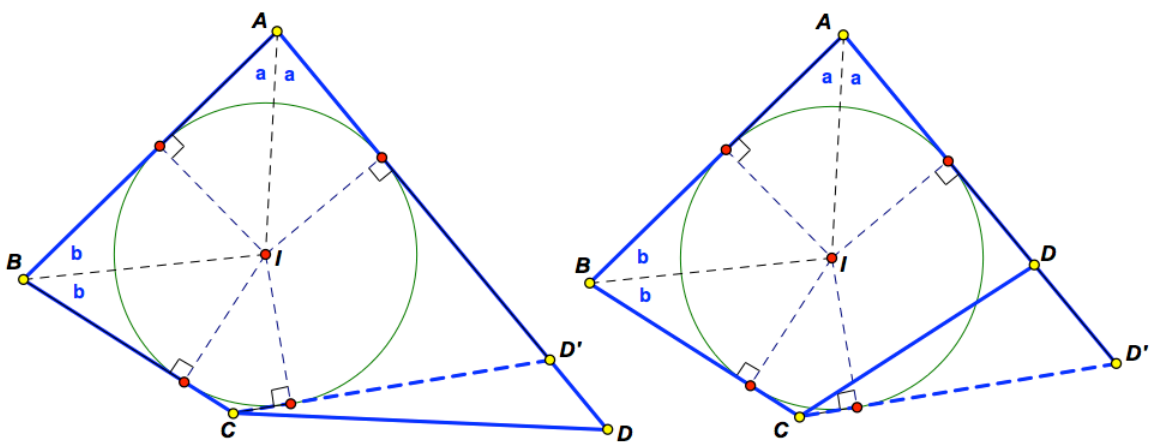


Figure 4: Proof of converse of Pitot's theorem

[2] This theorem is named after a French engineer Henri Pitot (1695-1771) who proved the forward implication in 1725. The converse was proved by the Swiss mathematician Jakob Steiner (1796-1863) in 1846.

A ready-made geometry sketch for learners to dynamically explore and gain confidence in the validity of the converse before dealing with the proof is available at: http://dynamicmathematicslearning.com/tangent-quad-converse.html

The proof of the converse, like its cyclic counterpart, is probably most easily done via proof by contradiction as follows. Consider Figure 4 where it is given that $AB + CD = BC + DA$. Construct the angle bisectors of angles A and B, and from their point of intersection I drop perpendiculars to sides AB, BC and AD. From I as centre, construct a circle through the feet of these perpendiculars so that sides AB, BC and AD are tangent to it. Assuming CD is not tangent to this circle, construct a tangent CD' as shown with D' on AB.

We now have $AB + CD' = BC + AD'$ since $ABCD'$ is tangential. But we are given that $AB + CD = BC + DA$ and therefore $CD' - CD = AD' - AD$ or $CD = CD' - AD' + AD$. However, in the first figure in Figure 4, $AD = AD' + D'D$ and therefore $CD = CD' - AD' + (AD' + D'D) = CD' + D'D$. This is impossible from the triangle inequality unless $D'D = 0$ and D' coincides with D, which contradicts our initial assumption that CD is not tangent to the circle. It's left to the reader to check that the same contradiction applies to the 2nd case shown in Figure 4. QED.

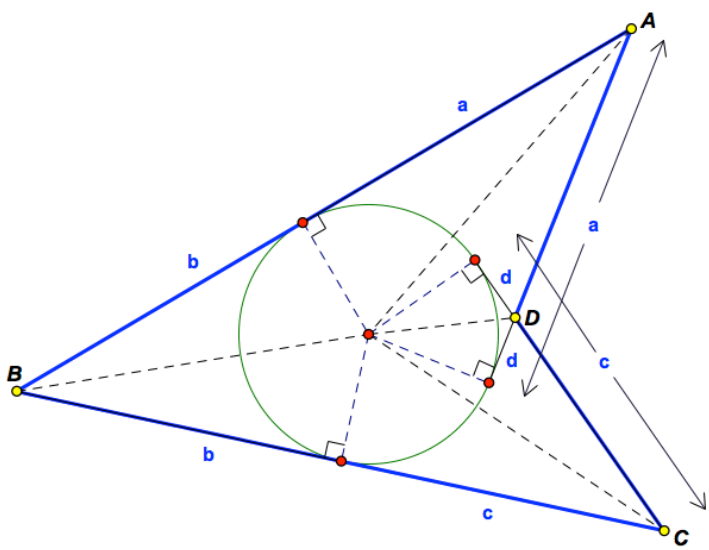


Figure 5: Concave tangential quadrilateral

It should be noted that a tangential quadrilateral could also be concave as shown in Figure 5 (in which case the extension of two of the sides are tangent to the incircle). A

dynamic geometry sketch of a tangential quadrilateral, which can be dragged to become concave, is available to explore at: http://dynamicmathematicslearning.com/tangential-quad.html

The proof of the concave case shown in Figure 5 is also quite straight forward, since in this case $AB + CD = a + b + c - d = BC + DA$. The converse of the concave case can also be proved using proof by contradiction, and is left to the reader.

INCIRCLES

The following result is quite remarkable as it appears to have only recently been discovered. A dynamic sketch for learners to first investigate and conjecture the result is available at: http://dynamicmathematicslearning.com/tangent-incircles-investigate.html

Theorem of Gusić & Mladinić

A quadrilateral is tangential, if and only if, the incircles of the two triangles formed by a diagonal are tangent to each other[3].

Proof

If the incircles of triangles *ABD* and *BCD* of a quadrilateral *ABCD* are tangent as shown in Figure 6, then it follows as before that $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$. Therefore, according to Pitot's theorem *ABCD* is a tangential quadrilateral. The same argument applies if incircles drawn in the two triangles formed by the other diagonal are tangent.

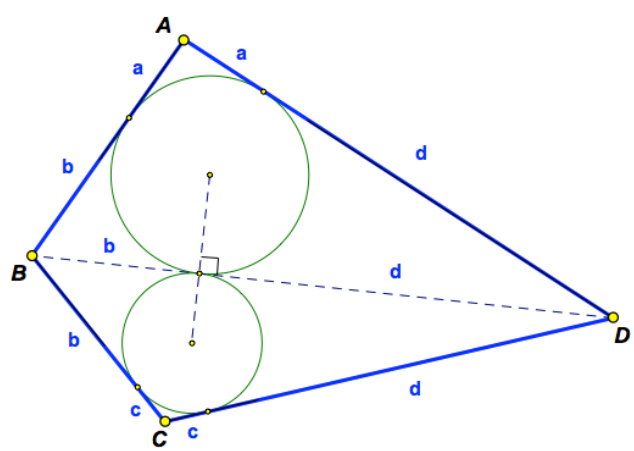


Figure 6: Tangent incircles of triangles *ABD* and *BCD*

[3] This theorem is named after two Croatian colleagues, Jelena Gusić & Petar Mladinić (2001), who as far as I've been able to ascertain, have priority in first publishing the result in 2001 in a journal *Poučak*. Later publications by Worrall (2004) and Josefsson (2011) also mention and prove the theorem.

To prove the converse, we shall first prove the following useful general theorem for any convex or concave quadrilateral (and which is also dynamically illustrated in the previous link).

Theorem 3

If a quadrilateral *ABCD* is divided by a diagonal and the incircles of the two formed triangles are constructed, then the distance *k* between the two tangent points of the incircles to the diagonal is equal to $|(AB + CD) - (BC + DA)|/2$.

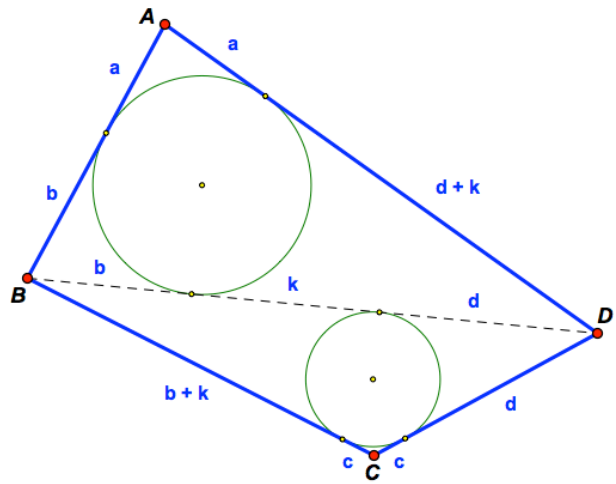


Figure 7: Incircles of triangles *ABD* and *BCD*

Proof

Consider Figure 7, which shows a general (convex) quadrilateral with the incircles of triangles *ABD* and *BCD* constructed. Labeling the equal tangents to the circles as before, we have that $\frac{|(AB+CD)-(BC+DA)|}{2} = \frac{|(a+b+c+d)-(b+k+c+d+k+a)|}{2} = \frac{2k}{2} = k$. The concave case is left to the reader.

An obvious corollary to Theorem 3 is that the distance between the two tangent points of the incircles of triangles *ABC* and *ACD* to the diagonal *AC* is also equal to *k*.

In addition, from Theorem 3, it now immediately follows that if *ABCD* is a tangential quadrilateral, then we know from Pitot's Theorem that $AB + CD = BC + DA$, in which case, the distance between the two incircles becomes zero, i.e. $k = 0$. In other words, the two incircles are tangent each other. This then completes the proof of the converse of the Theorem of Gusić & Mladinić.

FURTHER APPLICATION

A neat little application of Theorem 3 is the following result, which can be dynamically explored at: http://dynamicmathematicslearning.com/tangent-hex-apply.html

Theorem 4

If a tangential hexagon *ABCDEF* is triangulated by drawing 3 diagonals from any of its vertices, and the incircles of the four formed triangles are constructed, then the distance between the two tangent points of the incircles to the 1st diagonal is equal to the distance between the two tangent points of the incircles to the 3rd diagonal.

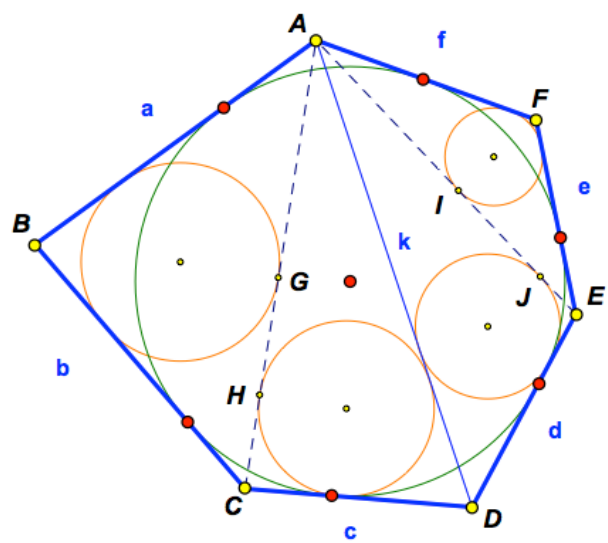


Figure 8: A triangulated tangential hexagon with incircles

Proof

Consider Figure 8, which shows a tangential hexagon *ABCDEF* with 3 diagonals drawn from vertex *A* to triangulate the hexagon. Label the sides of the hexagon consecutively by *a*, *b*, *c*, etc. and the main diagonal *AD* as *k*. We shall now use the following generalization of Pitot's theorem proved in De Villiers (1993, 2009), and which follows easily from the equal tangents to a circle theorem: "If a hexagon is tangential, then the two sums of its *alternate* sides are equal."[4]

From the aforementioned theorem, we have $a + c + e = b + d + f$. Next we apply Theorem 3 to *ABCD* and *DEFA*, and use the alternate side sum result to obtain:

$$2GH = |(a + c) - (b + k)| = |(- e + d + f) - k| = |(d + f) - (e + k)| = 2IJ \Rightarrow GH = IJ.$$

[4] Note that this generalization is true for any tangential 2*n*-gon, and what is normally labeled as 'opposite' sides of a tangential quadrilateral can also be regarded as its 'alternate' sides.

CONCLUDING REMARKS

This paper has hopefully given the reader some taste of the mathematical possibilities of exploring tangential quadrilaterals. It provides a rich context for revising and applying geometric ideas and theorems such as equidistance, angle bisectors, incircle, incentre, and the equal tangents theorem, as well as the important proof technique of proof by contradiction. Many more beautiful results can be explored and proved regarding tangential quadrilaterals, some of which are given in the references.

Using dynamic geometry software, learners can first experimentally explore several of these results, formulating, checking & disproving conjectures, before engaging in the process of proof. However, some of these results, like the forward implication of Pitot's theorem, could also be meaningfully used to illustrate to learners the *discovery* function of proof, without any prior experimental investigation, by directly applying the equal tangents theorem to a tangential quadrilateral (compare De Villiers, 2003, pp. 68-69).

References

De Villiers, M. (1993). A unifying generalization of Turnbull's theorem. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 24(2), pp. 191-196.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with Sketchpad*. Emeryville: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2009). *Some Adventures in Euclidean Geometry*. Lulu Publishers.

Gusić, J. & Mladinić, P. (2001). Tangencijalni četverokut. *Poučak*, No. 7, October, pp. 46-53.

Josefsson, M. (2011). More Characterizations of Tangential Quadrilaterals. *Forum Geometricorum*, Vol. 11, pp. 65–82. Accessed on 19 August 2020 at: http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201108.pdf

Worrall, C. (2004). A Journey with Circumscribable Quadrilaterals. *Mathematics Teacher*, Vol. 98, No. 3, October, pp. 192-199.

DELVING deeper

Charles Worrall

A Journey with Circumscribable Quadrilaterals

If we want to inspire a talented young writer to be a poet, we do not start with a grammar book. Instead, inspiration and love of literature come from reading complex works of art like *Hamlet* or *Catcher in the Rye*. Promoting a similar idea, Einstein wrote, "the mysterious . . . is the source of true art and science" (Ulam 1976, p. 289). To be more specific, one way to develop urgency and curiosity in mathematics students is to encourage them to wrestle with complex mathematical objects, ones whose deep and mysterious relationships are waiting to be found.

Recently, my honors geometry students and I investigated a mysterious object that rewards close scrutiny and fosters curiosity in students. The object first came to my attention years ago as a dead-end problem meant to test knowledge of the following simple circle theorem:

(1) *The two tangent segments drawn from a point outside a circle to the circle are congruent.*

The problem illustrated in **figure 1** is probably familiar to geometry teachers:

PROBLEM 1: A quadrilateral with consecutive sides of length 12, 15, and 17 units circumscribes a circle. Find the length of the fourth side.

I use the term *dead-end* to mean that the problem was probably designed only to illustrate the algebraic implications of theorem (1), not to spur any further questioning. A little pushing and prodding, though, reveal a doorway to some fascinating mathematics. In the remainder of this article, I trace a path beginning with problem 1 that illustrates how teachers can use their own mathematical curiosity to engender the same in students, thereby showing where a simple but relentless habit of questioning can lead.

A minor trick makes solving problem 1 simple. If we resist the urge to assign a variable to AD and instead let one of the small tangent segment lengths be x, then by using theorem (1) and segment addition repeatedly, we can rewrite all the side lengths in terms of x. **Figure 2** shows a particular case. We see that

$$\begin{aligned} AD &= (14 - x) + x \\ &= 14. \end{aligned}$$

This department focuses on mathematics content that appeals to secondary school teachers. It provides a forum that allows classroom teachers to share their mathematics from their work with students, classroom investigations and projects, and other experiences. We encourage submissions that pose and solve a novel or interesting mathematics problem, expand on connections among different mathematical topics, present a general method for describing a mathematical notion or solving a class of problems, elaborate on new insights into familiar secondary school mathematics, or leave the reader with a mathematical idea to expand. Please send submissions to "Delving Deeper," *Mathematics Teacher*, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502; or send electronic submissions to mt@nctm.org.

Edited by ***Al Cuoco,*** *alcuoco@edc.org*
Center for Mathematics Education, Newton, MA 02458

E. Paul Goldenberg, *pgoldenberg@edc.org*
Education Development Center, Newton, MA 02458

When students first solve a problem like this one by seeing the x's drop out, they almost jump out of their seats. We might as well pull a rabbit out of a hat, because it seems like magic, not mathematics.

But more interesting than the magical algebraic properties of the solution is the set of questions—the *pathway*—that the solution opens up for students. If prompted to think beyond finding the "solution" to bigger questions of causality, at least one keen student will usually notice that $14 + 15 = 12 + 17$; and he or she will perhaps even wonder whether the sum of a pair of opposite side lengths is always equal to the sum of the other pair. A polygon (apparently) with a property as surprising as this one is worthy of a definition. So we define a *circumscribable quadrilateral* to be one that contains a circle tangent to each of its sides.

Questions arise. Are all quadrilaterals circumscribable? If not, then what characterizes one that is and one that is not? Can we prove generally the constant sum of opposite sides observed in the problem? What does *generally* mean here? Does an extension to circumscribable n-gons exist? All these questions really boil down to one overarching one, which I phrase in the following two ways:

- What are the properties of circumscribable quadrilaterals; and conversely, what are the necessary conditions that make quadrilaterals circumscribable?
- Or, as I state the question in class, What makes these things tick?

Different mathematicians will proceed in different ways, and other fruitful extensions and alternative avenues of inquiry can be found. But I find that beginning by looking for insights in a simpler class of objects than quadrilaterals, namely, circumscribable triangles, is useful here. Of course, the famous *incircle* of a triangle and its center, the *incenter,* have their own set of marvelous properties, all of which begin with the fact that in any triangle, the incenter sits at the point of concurrency of the three angle bisectors. Ironically, though, as an answer to the question that we are investigating, the fact that all triangles have an incircle is actually a bit disappointing. What is the defining characteristic of a circumscribable triangle? Apparently, simple existence is the answer.

We can learn some lessons from the triangle case. First, we should think about the angle bisectors in a circumscribable quadrilateral. Second, with more urgency than before, we must ask—and hope the answer is no—whether all quadrilaterals are circumscribable. If we allow nonconvex quadrilaterals, that is, quadrilaterals with angles of more than 180 degrees, the answer is definitely no. A little thought reveals that no

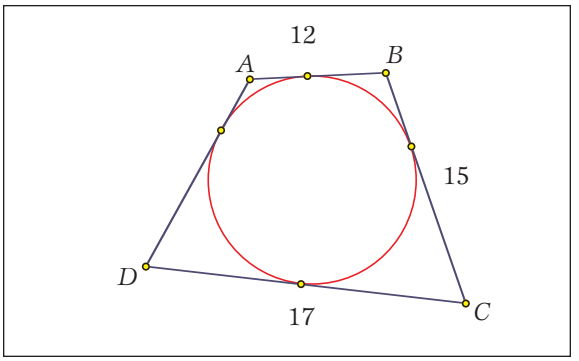


Fig. 1 Problem 1: Find *AD*.

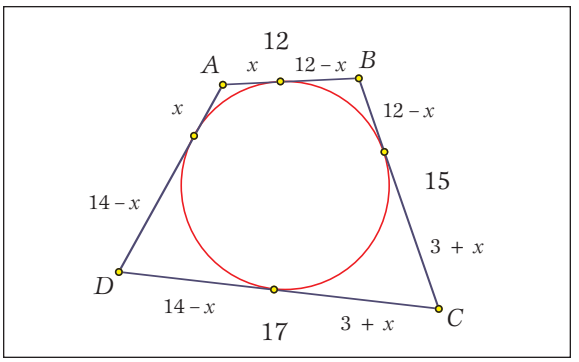


Fig. 2 Side lengths rewritten in terms of x

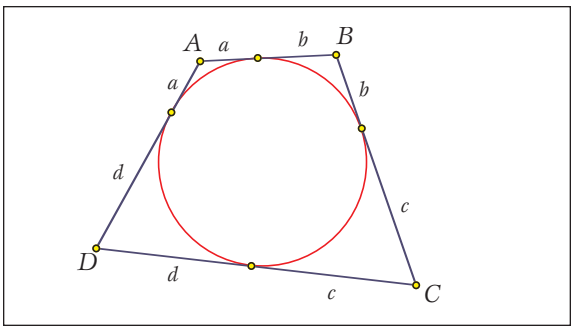


Fig. 3 A circumscribable quadrilateral

nonconvex quadrilateral can possibly be circumscribable. So the real question is whether all convex quadrilaterals are circumscribable. In this article, we assume everywhere that *quadrilaterals are convex.*

To deal with the second of these lessons first, a moment's reflection convinces us that, at the very least, a square is circumscribable. It is fair to say, therefore, that at least a few such quadrilaterals exist. Consider in **figure 3** a circumscribable quadrilateral $ABCD$ (not necessarily a square, of course). Each side of the quadrilateral is divided naturally into two parts by a point of tangency to the circle. By theorem (1), the side lengths $a, b, c,$ and d occur in pairs as they appear in the diagram. We easily see that

$$\begin{aligned} AD + BC &= (a + d) + (b + c) \\ &= (a + b) + (d + c) \\ &= AB + CD. \end{aligned}$$

Phrased nicely, the theorem says,

(2) *In a circumscribable quadrilateral, the sum of the lengths of a pair of opposite sides is equal to the sum of the lengths of the other pair of opposite sides.*

Hooray! Circumscribable quadrilaterals do in fact have the equal-sum property. Just as exciting is that we have proved definitively that not all quadrilaterals are circumscribable. Theorem (2) is originally from Darij Grinberg, a brilliant German university student. His proofs are available at de.geocities.com/darij_grinberg. The circumscribable quadrilaterals are in an elite club, every member of which has the special property described. But does every quadrilateral with the equal-sum property get to be in the club? We would love to prove the following theorem, since it seems like it ought to be true.

(3) *If the sum of the lengths of a pair of opposite sides of a quadrilateral is equal to the sum of the lengths of the other pair of sides, then the quadrilateral is circumscribable.*

At least three completely different proofs of the problem exist. One is by contradiction, one uses the Pythagorean theorem, and a third—the most direct and beautiful—is found in a dusty old mathematics textbook. The proof by contradiction is my own. The proof that uses the Pythagorean theorem is by Christopher Jones at the Horace Mann School in New York City. The dusty old mathematics textbook is *College Geometry,* by Altshiller-Court (1952). A particular class might find its way to one of these proofs or another one altogether. In my class, I sometimes take the time with a theorem like this one to assign a two-day research project. Students team up in small groups, each studying one of the several proofs, and then they give fifteen-minute class presentations.

In his classic *College Geometry,* Nathan Altshiller-Court (1952, p. 135–36) proves theorem (3) in a way that makes apparent deep relationships inside circumscribable quadrilaterals; it is therefore the one that we will consider. I present the proof in my own words, beginning with two common theorems.

(4) *The three perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent at a point called the* circumcenter *of the triangle.*

(5) *A point is on the angle bisector of an angle if and only if the point is equidistant from the sides of the angle, that is, if and only if the lengths of the perpendicular segments from the point to the sides of the angle are equal.* (See **fig. 4.**)

We forgo the proofs of theorems (4) and (5) since they are found in many other places.

Before beginning the proof of theorem (3), we can use theorem (5) to say something important about the angle bisectors in a circumscribable quadrilateral—as we resolved to think about a moment ago when we were considering triangles. (See **fig. 5.**) Suppose that in a circumscribable quadrilateral *ABCD,* we draw the inscribed circle, its center *O,* and the four radii to the sides. The radii are clearly congruent to one another and perpendicular to the sides of *ABCD*. From theorem (5), we immediately conclude that *O* is on each of the angle bisectors of the angles of *ABCD.* Conversely, suppose that a quadrilateral *ABCD* has four angle bisectors concurrent at a point *O*. Then by theorem (5) again, the four perpendicular segments from *O* to the sides of *ABCD* are of equal length. If we draw in the circle with center *O* through the feet of the four perpendicular segments, then, by their perpendicularity to the segments, the sides of *ABCD* are tangent to the circle. Thus, *ABCD* circumscribes circle *O,* making *ABCD* a circumscribable quadrilateral. We have proved a theorem reminiscent of those for the incircle and incenter of a triangle.

(6) *The four angle bisectors of a quadrilateral are concurrent if and only if the quadrilateral is circumscribable.*

We are ready for Altshiller-Court's proof of theorem (3). It is divided into two cases that at first glance do not seem particularly helpful: the case when two consecutive sides of *ABCD* are of equal length and the case when they are of different lengths. We begin with *ABCD* such that $AB + CD = AD + BC$, and in case 1, where $AB = BC$. We must show that *ABCD* is circumscribable. With that goal

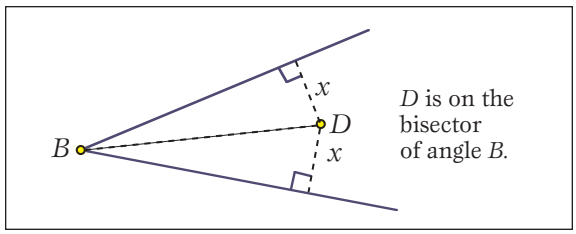


Fig. 4 Illustration of theorem (5)

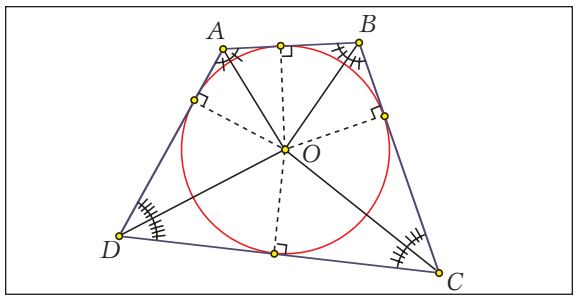


Fig. 5 Angle bisectors in a circumscribable quadrilateral

in mind, we subtract the second equation from the first to see that $CD = AD$, too. Therefore, as **figure 6** indicates, $ABCD$ must be either a kite or a rhombus. Either way, after drawing $\overline{BD}$, we can see that $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ by SSS, and so $\angle B$ and $\angle D$ are each bisected by $\overline{BD}$. When we consider the same congruent triangles, the angle bisectors of the corresponding angles at vertices A and C must intersect the common opposite side, $\overline{BD}$, at the same point, labeled O in the figure. We have therefore shown that the four angle bisectors are concurrent at O; and so, by theorem (6), $ABCD$ is circumscribable.

Although case 1 is relatively commonplace (after all, congruent triangles are the bread and butter of high school geometry), the proof of case 2 is downright spectacular. We are again given that $AB + CD = AD + BC$, but we assume that $AB \neq BC$ and without loss of generality, that $AB < BC$. By inspecting the equation $AB + CD = AD + BC$, we conclude that $CD > AD$. Therefore, there exist points E and F on $\overline{BC}$ and $\overline{CD}$ such that $BE = AB$ and $FD = AD$. From the given information, segment addition, substitution, and subtraction, we obtain the following equations:

$$\begin{aligned} AB + CD &= AD + BC \\ \Rightarrow AB + CF + FD &= AD + BE + EC \\ \Rightarrow BE + CF + AD &= AD + BE + EC \\ \Rightarrow CF &= EC \end{aligned}$$

Inspecting **figure 7** indicates that, perhaps surprisingly, $\triangle ABE$, $\triangle ADF$, and $\triangle ECF$ are each isosceles. Right here, we might pause to acknowledge that we have found a part of the "nature" of circumscribable quadrilaterals—a part of what makes them tick. They all contain three isosceles triangles.

We next consider the three respective angle bisectors at $\angle B$, $\angle C$, and $\angle D$. Since $\triangle ABE$ is isosceles, the angle bisector at $\angle B$ is also the perpendicular bisector of base $\overline{AE}$. By the same reasoning, since the angle bisectors at $\angle C$ and $\angle D$ are in isosceles triangles, too, they are the perpendicular bisectors of bases $\overline{EF}$ and $\overline{AF}$. Thus, the three angle bisectors at $\angle B$, $\angle C$, and $\angle D$ are simultaneously the three perpendicular bisectors of the sides of $\triangle AEF$, which by theorem (4) are concurrent at a point O, the circumcenter of the triangle. We have three of the angle bisectors of $ABCD$ concurrent. Now we hope that the fourth angle bisector goes through O, too. This part is easy: in **figure 8,** we draw in the four perpendicular segments from O to the sides of $ABCD$. (A fine discussion develops if a student asks how we can be sure that the perpendiculars fall inside $ABCD$.) By using theorem (5) three times and some transitivity, we find that O is equidistant from sides $\overline{AD}$ and $\overline{AB}$. Therefore, again by theorem (5), O is on the bisector of $\angle A$, which makes $ABCD$ circumscribable, by theorem (6). QED.

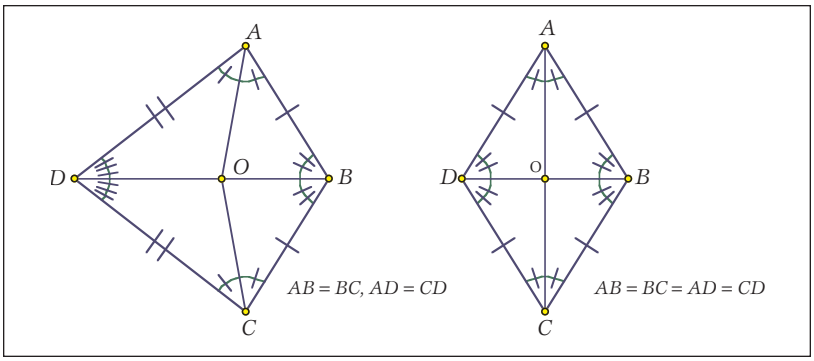


Fig. 6 Each of the angle bisectors of *ABCD* is concurrent at point *O*.

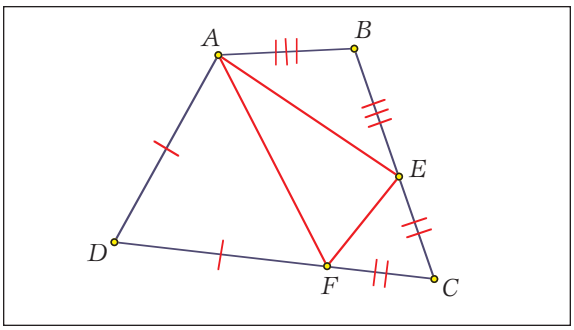


Fig. 7 Triangles *ABE*, *ADF*, and *ECF* are each isosceles.

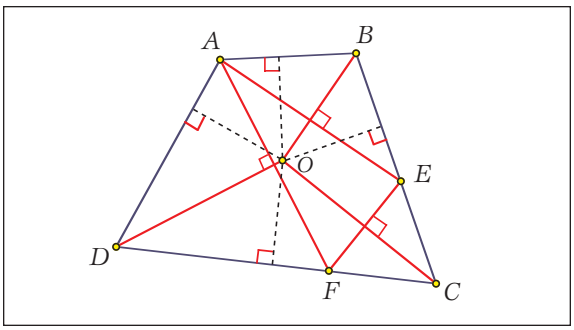


Fig. 8 Draw four perpendicular segments from point *O* to the sides of *ABCD*.

The style of most geometry textbooks lulls us into a tendency to make a full stop after finding such a fine result; but typically in mathematics, this moment is exactly when the fun begins. In fact, the isosceles triangles in the Altshiller-Court proof are extremely provocative, strongly hinting that more structure waits to be observed in circumscribable quadrilaterals. I have found at least one more necessary and sufficient condition for circumscribability. The theorem does not exist in any of the literature that I have read on circumscribable quadrilaterals, but it instead arose from a problem that I designed to give students the chance to use theorem (1). It is another good example of an ostensible ending point that can serve as a beginning (the first example being problem 1).

PROBLEM 2: In **figure 9,** the incircles of $\triangle ADC$ and $\triangle ABC$ are tangent to each other at E. If $AD = 15$, $DC = 17$, and $BC = 16$, then find AB.

Just as with problem 1, the solution is not difficult if we assign a variable to a tangent length and follow our noses. We let $AE = x$, for example. Then the point of tangency with the incircle divides $\overline{AD}$ into two lengths, x and $15 - x$. Continuing with the same technique, we find expressions for the lengths on $\overline{CD}$, then $\overline{CE}$, then $\overline{BC}$, and finally $\overline{AB}$, as indicated in **figure 10.** The length of $\overline{AB}$ is $x + (14 - x)$, which is 14.

But there is something fishy about that answer—not to mention familiar about the method of solution. Given a moment to think, someone will notice that

$$15 + 16 = 17 + 14.$$

The sum of one pair of opposite side lengths is equal to the sum of the other pair of opposite side lengths. Although its inscribed circle is nowhere to be seen, it is a circumscribable quadrilateral. Surprisingly, what we have is another necessary and sufficient condition for circumscribability. Specifically,

(7) *A quadrilateral is circumscribable if and only if the incircles of the two triangles formed by a diagonal are tangent to each other.*

In **figure 11,** we start the first half of the proof given quadrilateral $ABCD$, diagonal $\overline{AC}$, and the incircles of the resulting triangles tangent at point E. We must show that $ABCD$ is circumscribable. The lengths $a, b, c,$ and d appear in the diagram indicating equal lengths. It should be clear, though, that the three segments labeled a are in fact equal because two pairs of segments are congruent by theorem (1). All three are congruent only because of transitivity, because they are each congruent to the shared tangent $\overline{AE}$ of length a. The same argument provides justification for concluding that the three sides of label c in the figure are in fact congruent.

The proof is now immediate:

$$\begin{aligned} AB + CD &= (a + b) + (c + d) \\ &= (a + d) + (b + c) \\ &= AD + BC \end{aligned}$$

By theorem (3), $ABCD$ is circumscribable.

Recalling how clever Altshiller-Court needed to be to prove the second half of his theorem, we might be hesitant to try the second half of the proof of theorem (7). But it turns out to be remarkably clean and simple. We are given a circumscribable quadrilateral $ABCD$ and must show that the incircles of the triangles formed by diagonal $\overline{AC}$ are tangent to each other.

We consider the two incircles of $\triangle ACD$ and $\triangle ACB$ in **figure 12,** and we do not picture the circles' points of tangency on $\overline{AC}$. Furthermore, from theorem (1), we have only two congruences, so we have the lengths $a, b, c, d, e,$ and f, as they are marked in the figure.

Since $ABCD$ is circumscribable,

$$AB + CD = AD + BC.$$

So

$$(a + b) + (e + d) = (e + f) + (b + c).$$

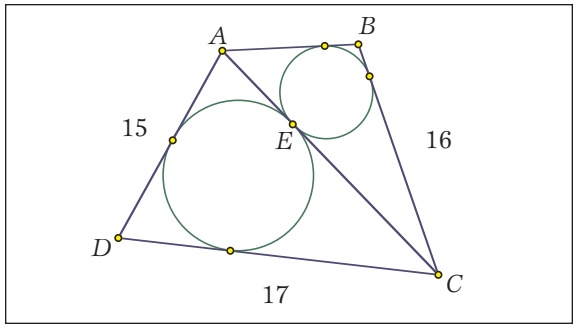


Fig. 9 Problem 2: Find AB.

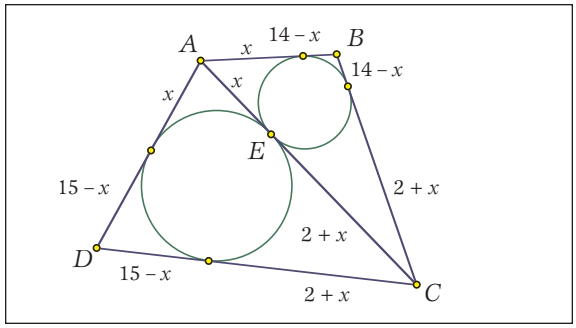


Fig. 10 Segment lengths rewritten in terms of x

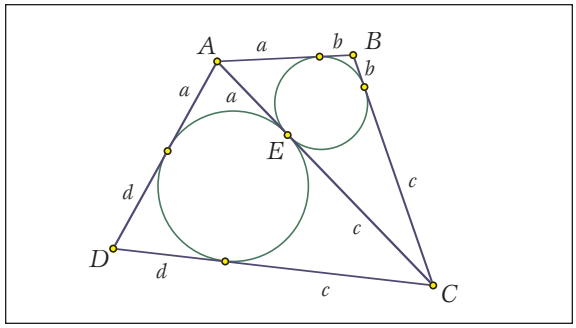


Fig. 11 The incircles of $ABCD$ are tangent to each other. Show that $ABCD$ is circumscribable.

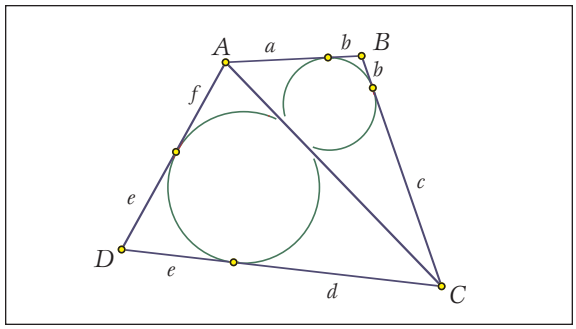


Fig. 12 Quadrilateral $ABCD$ is circumscribable. Show that the incircles are tangent to each other.

By subtracting b and e from both sides, we get

$$(*) \qquad (a+d) = (c+f).$$

Since $\overline{AC}$ is tangent to the incircle of $\triangle ABC$, we find that $AC = (a+c)$ by applying theorem (1) twice. By the same reasoning, since $\overline{AC}$ is tangent to the incircle of $\triangle ACD$, $AC = (d+f)$. So

$$(**) \qquad (a+c) = (d+f).$$

By subtracting equation (*) from equation (**), we get

$$(a+c) - (a+d) = (d+f) - (c+f).$$

Therefore,

$$c - d = d - c$$

and

$$2c = 2d.$$

Finally,

$$c = d.$$

Looking back at **figure 12,** we note that $c = d$ means that the distances from C to the points of tangency of both the incircles on side $\overline{AC}$ are equal. Therefore, the points are the same, and our proof of theorem (7) is complete. QED.

To sum up, we have found three different necessary and sufficient conditions for quadrilateral circumscribability. Said another way, if one of the following four statements is true, then all of them are true:

- $ABCD$ is circumscribable.
- The four angle bisectors of $ABCD$ are concurrent.
- $AB + CD = AD + BC$.
- The incircles of the two triangles formed by a diagonal of $ABCD$ are tangent to each other.

Figure 13 summarizes the discoveries that we have made. When presented to a class or constructed by students themselves by using such interactive geometry software as The Geometer's Sketchpad, the diagram makes a visually satisfying answer to the overarching questions: What are the properties of a circumscribable quadrilateral, and what are the necessary conditions for its existence? Seeing the five circles generated, we bear witness to what makes circumscribable quadrilaterals tick.

A neat ending of this journey is again possible, but—again—why stop? To show some more of the richness of these quadrilaterals—and of the implications of the Altshiller-Court proof—I will prove one more theorem. In a circumscribable quadrilateral, there are two other interesting circles, both of them concentric with the quadrilateral's inscribed circle. I actually found seven interesting concentric circles centered at O, which, for those inclined to further investigation, can easily be found by fiddling with The Geometer's Sketchpad. The theorem is a little hard to state, but it can be simply understood with a picture.

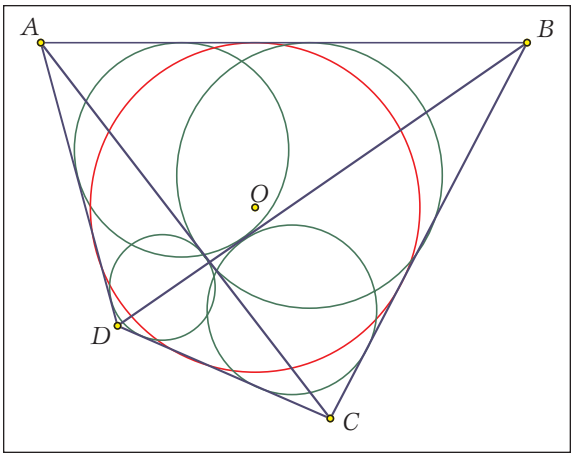


Fig. 13 Summary of discoveries about quadrilateral circumscribability

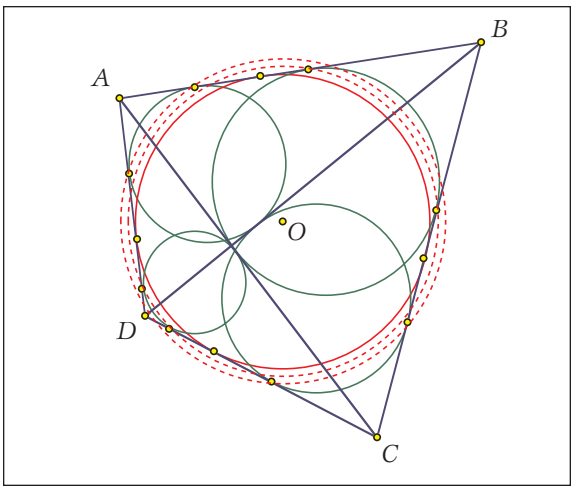


Fig. 14 Two circles that are concentric with the quadrilateral's inscribed circle

(8) *The four sides of a circumscribable quadrilateral intersect the incircles of the two triangles formed by a diagonal of the quadrilateral to form four points, all of which are on a circle that is concentric with the quadrilateral's inscribed circle.*

Of course, since there are two diagonals, there are two such circles, both concentric with the original inscribed circle, as shown in **figure 14.**

The proof is simple and satisfying. Perhaps not unexpectedly, we will make use of the circumscribable quadrilateral's more famous cousin, the cyclic

quadrilateral, one for which a circle exists that passes through all four vertices. At this point, we need just two things: a simple algebraic observation about the lengths of segments created by the points of tangency of the five circles inside a circumscribable quadrilateral, and a well-known corollary to the inscribed-angle theorem for circles. First, the corollary:

(9) *Two opposite angles in a quadrilateral are supplementary if and only if the quadrilateral is cyclic.*

The proof is available in many other places, so we omit it here.

The observation about side lengths is actually a repeated application of theorem (1). It is a nice exercise for students to convince themselves that each side of circumscribable quadrilateral *ABCD* is divided into four of six lengths marked *a, b, c, d, e,* and *f,* as in **figure 15.** Take a moment to convince yourself, as well.

We next consider $\triangle DAB$. With the memory of Altshiller-Court's proof still vivid, it is almost impossible not to see in **figure 15** that three nested isosceles triangles are in $\triangle DAB$, their bases forming three parallel lines. **Figure 16** shows those and three other sets of three parallel lines, corresponding to similar nestings in $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, and $\triangle CBA$. (Once again, I am tempted to say that this one, **figure 16,** shows the essential qualities of circumscribable quadrilaterals.)

The proof is almost anticlimactic from here. Making the trivial observation that *FGHJ* is cyclic, we see that $\angle JFG$ and $\angle JHG$ are supplementary by corollary (9). From the parallel lines, we easily see that $\angle JFG \cong \angle SKN$ and that $\angle JHG \cong \angle SPN$. Therefore, $\angle SKN$ is supplementary to $\angle SPN$, and *SKNP* is cyclic by corollary (9), as shown in **figure 17.** By the way, if we look around, we can find a lot of other cyclic quadrilaterals—most, though, are not centered at *O;* readers who are of a combinatorical bent might find that counting them is an interesting challenge. All that remains is to show that *O* is the center of the circle that circumscribes *SKNP.*

The perpendicular bisector of a chord of a circle always passes through the circle's center. Therefore, since *O* is known to be the center of the circle that circumscribes *FGHJ,* we conclude that *O* is the point of intersection of the perpendicular bisectors of $\overline{FJ}$ and $\overline{JH}$. To show that *O* is the center of the circle through *SKNP,* showing that *O* is the point of intersection of the perpendicular bisectors of $\overline{SK}$ and $\overline{PS}$ is sufficient. As we know, the bisector of the vertex angle of an isosceles triangle is also the perpendicular bisector of the opposite side. Therefore, since $\overline{AO}$ is the perpendicular bisector of $\overline{FJ}$, it is also the angle bisector of $\angle A$, which makes it the perpendicular bisector of $\overline{SK}$ in isosceles $\triangle SAK$. By identical reasoning, $\overline{DO}$, the perpendicular bisector of $\overline{JH}$, is also the perpendicular bisector of $\overline{PS}$. Therefore, we have shown that the perpendicular bisectors of $\overline{SK}$ and $\overline{PS}$ intersect at *O,* making it the center of the circle circumscribing *SKNP*. QED.

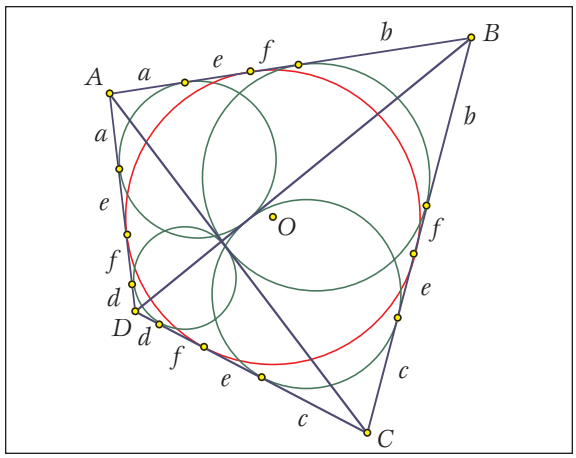


Fig. 15 Each side of circumscribable quadrilateral *ABCD* is divided into four of six lengths marked *a, b, c, d, e,* and *f.*

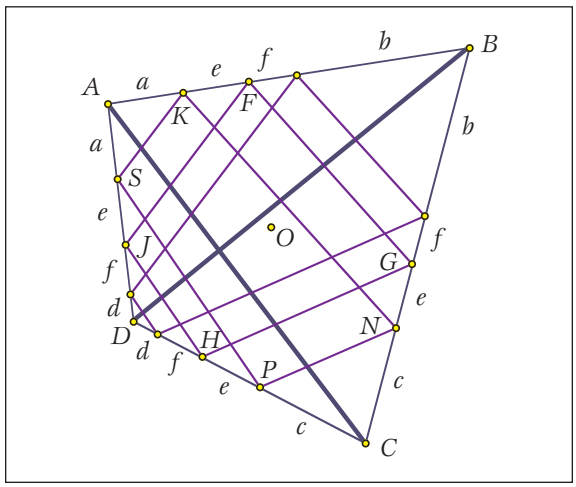


Fig. 16 Three nested triangles are in triangles *DAB, BCD, CDA,* and *CBA,* their bases each forming three parallel lines.

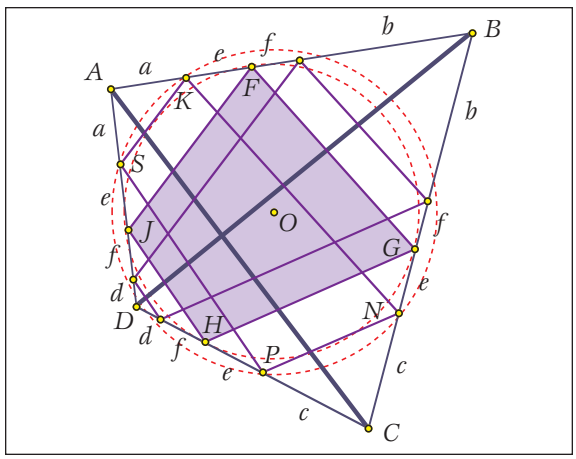


Fig. 17 Quadrilateral *SKNP* is cyclic.

We have not exhausted the possibilities for theorems in circumscribable quadrilaterals—which is perhaps my overall point in writing this article. One of the keys to teaching our students to be curious and deep thinkers is to illustrate to them an easily misunderstood fact: the reason that high school teachers move from one topic to the next is that we must, because we teach survey courses. In fact, we never move to the next topic because we have run out of interesting things to investigate. In this light, we are tempted to end each unit with an apology. "I am sincerely sorry that we must now stop investigating circumscribable quadrilaterals. We could spend years finding surprising, deep results here, but we do not have the time in this course. Thus, we reluctantly move on. However, if any of you finds something else interesting in your free time, please tell me about your discoveries. Perhaps we could coauthor a paper." The payoff to grappling with "mysterious" objects like circumscribable quadrilaterals might not only be more curious students, but published ones, as well.

REFERENCES

Alshiller-Court, Nathan. *College Geometry*. New York: Barnes & Noble, 1952.

Grinberg, Darij. "Website for Eulidean Geometry, Especially Triangle Geometry." Available at de.geocities.com/darij_grinberg. 2004. World Wide Web.

Ulam, Stanislaw M. *Adventures of a Mathematician.* New York: Charles Scribner & Sons, 1976.

EDITORS' NOTE

When we read submissions to "Delving Deeper," we are always on the lookout for interesting directions in which readers can take the author's ideas in yet other directions. We found ourselves in a nice e-mail dialogue with the author of this article, part of which we share here.

Eds: Dear Charles,
There are several places where your article tempts one into excursions into projective geometry. For example, when you shift attention from segments tangent to a circle to points on the circle, you play with a duality that might be interesting for some readers to follow up. For that matter, imagine your construction drawn on a piece of paper lying on a desk and viewed from an angle (at sufficient distance so that you can treat the projection as taking rectangles to parallelograms instead of the trapezoids that "real" local perspective generates). The circle becomes an ellipse, around which you have circumscribed a quadrilateral. All the things that you have proved have a generalization in this world of more-general conics.

Author's reply: There certainly is a generalization to conics—parabolas and hyperbolas, as well as ellipses. I've really fallen in love with these little quadrilaterals because there are so many directions to go with them. My own follow-up has remained squarely in traditional Euclidean geometry, where a boatload of observations can still be made. I am a member of an e-mail forum called *Hyacinthos* (it's a Yahoo group that anyone can join), which is an extraordinary clearinghouse for all things Euclidean, especially the advanced geometry of the triangle. In December, I responded to a mathematician's ideas about a circumscribable q-lateral that he was looking at, and it ended up generating a remarkable flurry of e-mails from around the world. (It also corroborated that my final theorem in the article is probably new.) Lots of amazing theorems can be proved about these little objects. Here are two especially noteworthy theorems:

1. *If ABCD is a circumscribable q-lateral, then the incenters of the four nonoverlapping triangles formed by ABCD and the intersection of its diagonals are concyclic.*

It is a marvelous theorem for two reasons: it is simple to state and see, but it turns out to be difficult to prove; and in looking for a proof, we all turned up a zillion other surprising facts about the center of that circle, tangents to it, strange relationships between parallel lines, and so on. It is a doorway into some amazing stuff.

The second theorem is much less important—or fertile—but the proof that I saw for it uses some advanced ideas that left me, at least, feeling pretty unsatisfied. Then I started to play a little on my own and found a proof that is based on the theorem in the article about the common tangent point for the incircles of ABC and ADC in circumscribable q-lateral $ABCD$. Here is the theorem:

2. *If ABCD is a circumscribed quadrilateral with incenter O, the perpendicular to AB through A meets BO at M, and the perpendicular to AD through A meets DO at N, then MN is perpendicular to AC.*

My proof: [The author supplied a particularly elegant proof, which the editors have mischievously omitted. Pick a direction—Euclidean or projective—and have fun! —Eds.] ∞

CHARLES WORRALL, Charles_Worrall@horacemann.org, teaches at Horace Mann School in Riverdale, NY 10471. He is interested in someday writing a geometry textbook.

Forum Geometricorum
Volume 11 (2011) 65–82.

FORUM GEOM
ISSN 1534-1178

More Characterizations of Tangential Quadrilaterals

Martin Josefsson

Abstract. In this paper we will prove several not so well known conditions for a quadrilateral to have an incircle. Four of these are different excircle versions of the characterizations due to Wu and Vaynshtejn.

1. Introduction

In the wonderful paper [13] Nicuşor Minculete gave a survey of some known characterizations of tangential quadrilaterals and also proved a few new ones. This paper can to some extent be considered a continuation to [13].

A tangential quadrilateral is a convex quadrilaterals with an incircle, that is a circle tangent to all four sides. Other names for these quadrilaterals are[1] tangent quadrilateral, circumscribed quadrilateral, circumscribable quadrilateral, circumscribing quadrilateral, inscriptable quadrilateral and circumscriptible quadrilateral. The names inscriptible quadrilateral and inscribable quadrilateral have also been used, but sometimes they refer to a quadrilateral with a circumcircle (a cyclic quadrilateral) and are not good choices because of this ambiguity. To avoid confusion with so many names we suggest that only the names *tangential quadrilateral* (or tangent quadrilateral) and circumscribed quadrilateral be used. This is supported from the number of hits on Google[2] and the fact that both MathWorld and Wikipedia uses the name tangential quadrilateral in their encyclopedias.

Not all quadrilaterals are tangential,[3] hence they must satisfy some condition. The most important and perhaps oldest such condition is the *Pitot theorem*, that a quadrilateral $ABCD$ with consecutive sides a, b, c and d is tangential if and only if the sums of opposite sides are equal: $AB + CD = BC + DA$, that is

$$a + c = b + d. \tag{1}$$

It is named after the French engineer Henri Pitot (1695-1771) who proved that this is a necessary condition in 1725; that it is also a sufficient condition was proved by the Swiss mathematician Jakob Steiner (1796-1863) in 1846 according to F. G.-M. [7, p.319].

Publication Date: March 18, 2011. Communicating Editor: Paul Yiu.

[1]In decreasing order of the number of hits on Google.

[2]Tangential, tangent and circumscribed quadrilateral represent about 80 % of the number of hits on Google, so the other six names are rarely used.

[3]For example, a rectangle has no incircle.

The proof of the direct theorem is an easy application of the *two tangent theorem*, that two tangents to a circle from an external point are of equal length. We know of four different proofs of the converse to this important theorem, all beautiful in their own way. The first is a classic that uses a property of the perpendicular bisectors to the sides of a triangle [2, pp.135-136], the second is a proof by contradiction [10, pp.62-64], the third uses an excircle to a triangle [12, p.69] and the fourth is an exquisite application of the Pythagorean theorem [1, pp.56-57]. The first two of these can also be found in [3, pp.65-67].

Two similar characterizations are the following ones. If $ABCD$ is a convex quadrilateral where opposite sides AB and CD intersect at E, and the sides AD and BC intersect at F (see Figure 1), then $ABCD$ is a tangential quadrilateral if and only if either of

$$\begin{aligned} BE + BF &= DE + DF, \\ AE - AF &= CE - CF. \end{aligned}$$

These are given as problems in [3] and [14], where the first condition is proved using contradiction in [14, p.147]; the second is proved in the same way[4].

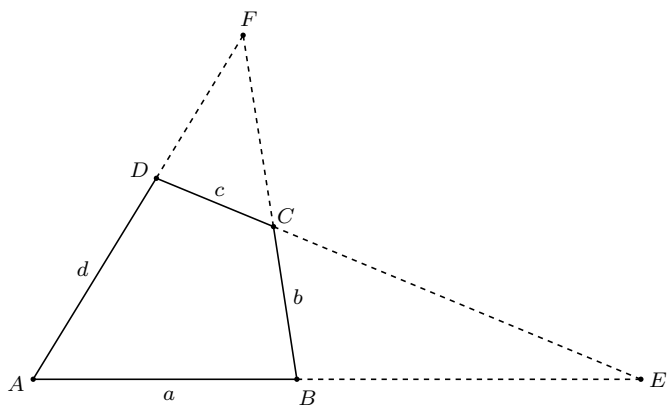


Figure 1. The extensions of the sides

2. Incircles in a quadrilateral and its subtriangles

One way of proving a new characterization is to show that it is equivalent to a previously proved one. This method will be used several times henceforth. In this section we prove three characterizations of tangential quadrilaterals by showing that they are equivalent to (1). The first was proved in another way in [19].

Theorem 1. *A convex quadrilateral is tangential if and only if the incircles in the two triangles formed by a diagonal are tangent to each other.*

[4] In [3, pp.186-187] only the direct theorems (not the converses) are proved.

Proof. In a convex quadrilateral $ABCD$, let the incircles in triangles ABC, CDA, BCD and DAB be tangent to the diagonals AC and BD at the points X, Y, Z and W respectively (see Figure 2). First we prove that

$$ZW = \tfrac{1}{2}\big|a - b + c - d\big| = XY.$$

Using the two tangent theorem, we have $BW = a - w$ and $BZ = b - z$, so

$$ZW = BW - BZ = a - w - b + z.$$

In the same way $DW = d - w$ and $DZ = c - z$, so

$$ZW = DZ - DW = c - z - d + w.$$

Adding these yields

$$2ZW = a - w - b + z + c - z - d + w = a - b + c - d.$$

Hence

$$ZW = \tfrac{1}{2}\big|a - b + c - d\big|$$

where we put an absolute value since Z and W can "change places" in some quadrilaterals; that is, it is possible for W to be closer to B than Z is. Then we would have $ZW = \frac{1}{2}(-a + b - c + d)$.

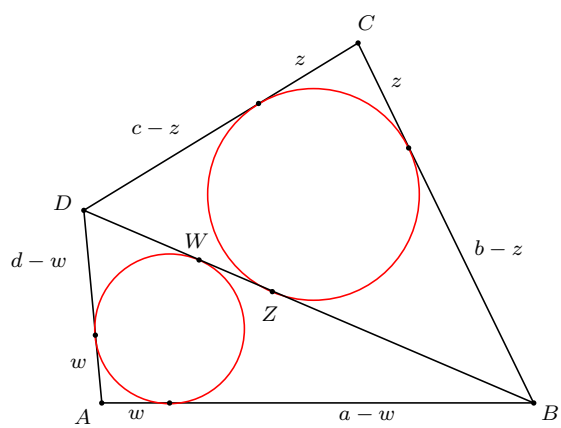


Figure 2. Incircles on both sides of one diagonal

The formula for XY is derived in the same way.

Now two incircles on different sides of a diagonal are tangent to each other if and only if $XY = 0$ or $ZW = 0$. These are equivalent to $a + c = b + d$, which proves the theorem according to the Pitot theorem. □

Another way of formulating this result is that the incircles in the two triangles formed by one diagonal in a convex quadrilateral are tangent to each other if and only if the incircles in the two triangles formed by the other diagonal are tangent to each other. These two tangency points are in general not the same point, see Figure 3, where the notations are different from those in Figure 2.

Theorem 2. *The incircles in the four overlapping triangles formed by the diagonals of a convex quadrilateral are tangent to the sides in eight points, two per side, making one distance between tangency points per side. It is a tangential quadrilateral if and only if the sums of those distances at opposite sides are equal.*

Proof. According to the two tangent theorem, $AZ = AY$, $BS = BT$, $CU = CV$ and $DW = DX$, see Figure 3. Using the Pitot theorem, we get

$$\begin{aligned} & AB + CD = BC + DA \\ \Leftrightarrow\ & AZ + ZS + BS + CV + VW + DW = BT + TU + CU + DX + XY + AY \\ \Leftrightarrow\ & ZS + VW = TU + XY \end{aligned}$$

after cancelling eight terms. This is what we wanted to prove. □

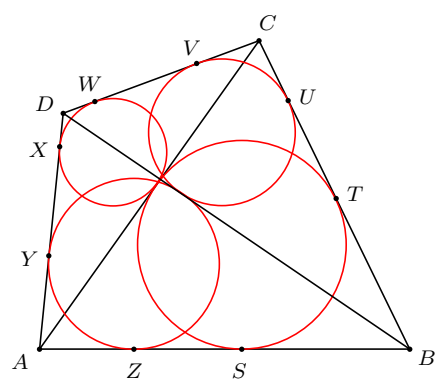


Figure 3. Incircles on both sides of both diagonals

The configuration with the four incircles in the last two theorems has other interesting properties. If the quadrilateral $ABCD$ is cyclic, then the four incenters are the vertices of a rectangle, see [2, p.133] or [3, pp.44-46].

A third example where the Pitot theorem is used to prove another characterization of tangential quadrilaterals is the following one, which is more or less the same as one given as a part of a Russian solution (see [18]) to a problem we will discuss in more detail in Section 4.

Theorem 3. *A convex quadrilateral is subdivided into four nonoverlapping triangles by its diagonals. Consider the four tangency points of the incircles in these triangles on one of the diagonals. It is a tangential quadrilateral if and only if the distance between two tangency points on one side of the second diagonal is equal to the distance between the two tangency points on the other side of that diagonal.*

Proof. Here we cite the Russian proof given in [18]. We use notations as in Figure 4 and shall prove that the quadrilateral has an incircle if and only if $T_1'T_2' = T_3'T_4'$.

By the two tangent theorem we have

$$AT_1 = AT_1^{''} = AP - PT_1^{''},$$
$$BT_1 = BT_1^{'} = BP - PT_1^{'},$$

so that

$$AB = AT_1 + BT_1 = AP + BP - PT_1^{''} - PT_1^{'}.$$

Since $PT_1^{''} = PT_1^{'}$,

$$AB = AP + BP - 2PT_1^{'}.$$

In the same way

$$CD = CP + DP - 2PT_3^{'}.$$

Adding the last two equalities yields

$$AB + CD = AC + BD - 2T_1^{'}T_3^{'}.$$

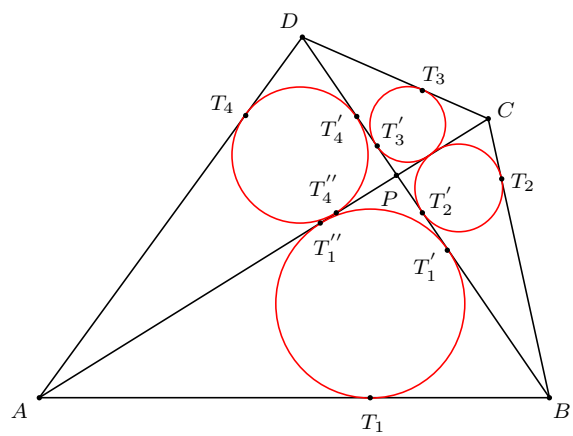


Figure 4. Tangency points of the four incircles

In the same way we get

$$BC + DA = AC + BD - 2T_2^{'}T_4^{'}.$$

Thus

$$AB + CD - BC - DA = -2\left(T_1^{'}T_3^{'} - T_2^{'}T_4^{'}\right).$$

The quadrilateral has an incircle if and only if $AB + CD = BC + DA$. Hence it is a tangential quadrilateral if and only if

$$T_1^{'}T_3^{'} = T_2^{'}T_4^{'} \quad \Leftrightarrow \quad T_1^{'}T_2^{'} + T_2^{'}T_3^{'} = T_2^{'}T_3^{'} + T_3^{'}T_4^{'} \quad \Leftrightarrow \quad T_1^{'}T_2^{'} = T_3^{'}T_4^{'}.$$

Note that both $T_1^{'}T_3^{'} = T_2^{'}T_4^{'}$ and $T_1^{'}T_2^{'} = T_3^{'}T_4^{'}$ are characterizations of tangential quadrilaterals. It was the first of these two that was proved in [18]. □

3. Characterizations with inradii, altitudes and exradii

According to Wu Wei Chao (see [20]), a convex quadrilateral $ABCD$ is tangential if and only if

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4},$$

where r_1, r_2, r_3 and r_4 are the inradii in triangles ABP, BCP, CDP and DAP respectively, and P is the intersection of the diagonals, see Figure 5.

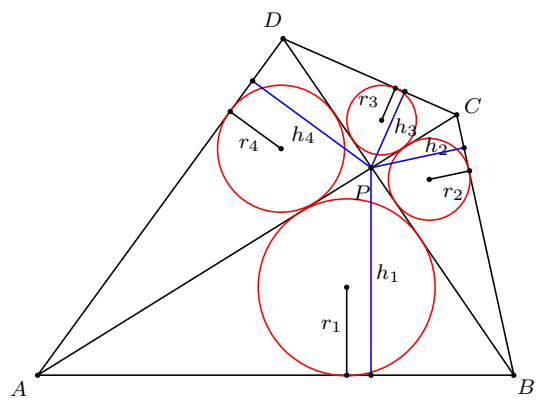


Figure 5. The inradii and altitudes

In [13] Nicuşor Minculete proved in two different ways that another characterization of tangential quadrilaterals is[5]

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}, \tag{2}$$

where h_1, h_2, h_3 and h_4 are the altitudes in triangles ABP, BCP, CDP and DAP from P to the sides AB, BC, CD and DA respectively, see Figure 5. These two characterizations are closely related to the following one.

Theorem 4. *A convex quadrilateral $ABCD$ is tangential if and only if*

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}$$

where R_1, R_2, R_3 and R_4 are the exradii to triangles ABP, BCP, CDP and DAP opposite the vertex P, the intersection of the diagonals AC and BD.

Proof. In a triangle, an exradius R_a is related to the altitudes by the well known relation

$$\frac{1}{R_a}=-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}. \tag{3}$$

[5]Although he used different notations.

If we denote the altitudes from A and C to the diagonal BD by h_A and h_C respectively and similar for the altitudes to AC, see Figure 6, then we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_1} &= -\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}, \\
\frac{1}{R_2} &= -\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}, \\
\frac{1}{R_3} &= -\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}, \\
\frac{1}{R_4} &= -\frac{1}{h_4} + \frac{1}{h_D} + \frac{1}{h_A}.
\end{aligned}$$

Using these, we get

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} = -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}\right).$$

Hence

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_4}.$$

Since the equality to the right is a characterization of tangential quadrilaterals according to (2), so is the equality to the left. □

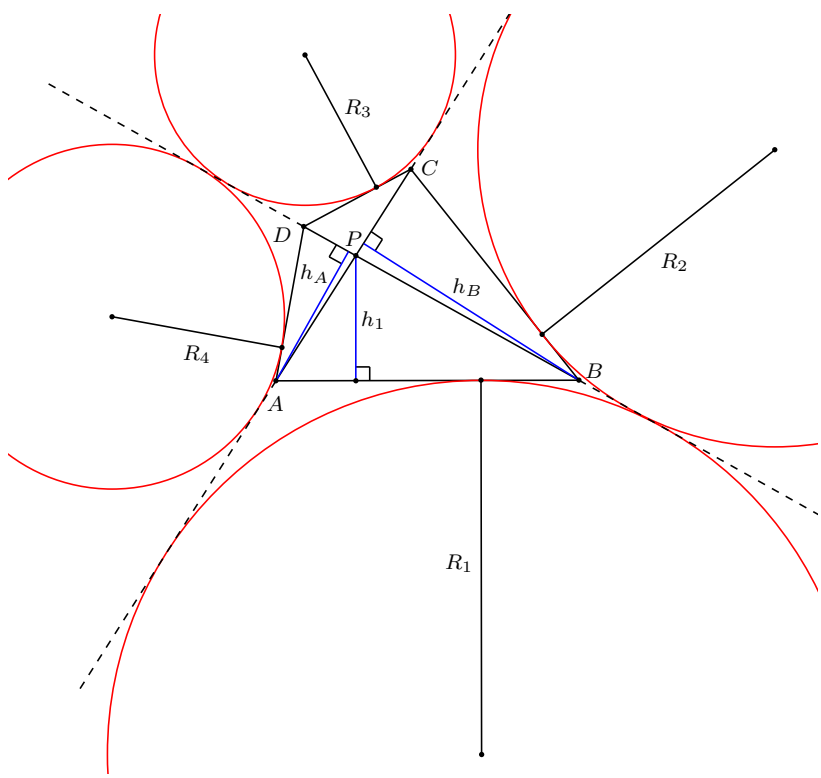


Figure 6. Excircles to four subtriangles

4. Christopher Bradley's conjecture and its generalizations

Consider the following problem:

In a tangential quadrilateral $ABCD$, let P be the intersection of the diagonals AC and BD. Prove that the incenters of triangles ABP, BCP, CDP and DAP form a cyclic quadrilateral. See Figure 7.

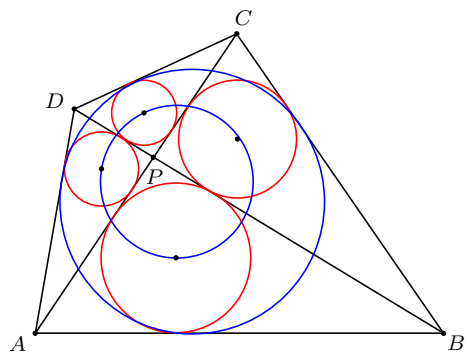


Figure 7. Christopher Bradley's conjecture

This problem appeared at the CTK Exchange[6] on September 17, 2003 [17], where it was debated for a month. On Januari 2, 2004, it migrated to the *Hyacinthos* problem solving group at Yahoo [15], and after a week a full synthetic solution with many extra properties of the configuration was given by Darij Grinberg [8] with the help of many others.

So why was this problem called *Christopher Bradley's conjecture*? In November 2004 a paper about cyclic quadrilaterals by the British mathematician Christopher Bradley was published, where the above problem was stated as a conjecture (see [4, p.430]). Our guess is that the conjecture was also published elsewhere more than a year earlier, which explains how it appeared at the CTK Exchange.

A similar problem, that is almost the converse, was given in 1998 by Toshio Seimiya in the Canadian problem solving journal Crux Mathematicorum [16]:

Suppose $ABCD$ is a convex cyclic quadrilateral and P is the intersection of the diagonals AC and BD. Let I_1, I_2, I_3 and I_4 be the incenters of triangles PAB, PBC, PCD and PDA respectively. Suppose that I_1, I_2, I_3 and I_4 are concyclic. Prove that $ABCD$ has an incircle.

The next year a beautiful solution by Peter Y. Woo was published in [16]. He generalized the problem to the following very nice characterization of tangential quadrilaterals:

When a convex quadrilateral is subdivided into four nonoverlapping triangles by its two diagonals, then the incenters of the four triangles are concyclic if and only if the quadrilateral has an incircle.

[6]It was formulated slightly different, where the use of the word inscriptable led to a misunderstanding.

There was however an even earlier publication of Woo's generalization. According to [8], the Russian magazine *Kvant* published in 1996 (see [18]) a solution by I. Vaynshtejn to the problem we have called Christopher Bradley's conjecture and its converse (see the formulation by Woo). [18] is written in Russian, so neither we nor many of the readers of Forum Geometricorum will be able to read that proof. But anyone interested in geometry can with the help of the figures understand the equations there, since they are written in the Latin alphabet.

Earlier we saw that Minculete's characterization with incircles was also true for excircles (Theorem 4). Then we might wonder if Vaynshtejn's characterization is also true for excircles? The answer is yes and it was proved by Nikolaos Dergiades at [6], even though he did not state it as a characterization of tangential quadrilaterals. The proof given here is a small expansion of his.

Theorem 5 (Dergiades)**.** *A convex quadrilateral $ABCD$ with diagonals intersecting at P is tangential if and only if the four excenters to triangles ABP, BCP, CDP and DAP opposite the vertex P are concyclic.*

Proof. In a triangle ABC with sides a, b, c and semiperimeter s, where I and J_1 are the incenter and excenter opposite A respectively, and where r and R_a are the radii in the incircle and excircle respectively, we have $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ and $AJ_1 = \frac{R_a}{\sin\frac{A}{2}}$. Using Heron's formula $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ and other well known formulas[7], we have

$$AI \cdot AJ_1 = r \cdot R_a \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a} \cdot \frac{bc}{(s-b)(s-c)} = bc. \tag{4}$$

Similar formulas hold for the other excenters.

Returning to the quadrilateral, let I_1, I_2, I_3 and I_4 be the incentes and J_1, J_2, J_3 and J_4 the excenters opposite P in triangles ABP, BCP, CDP and DAP respectively. Using (4) we get (see Figure 8)

$$\begin{aligned} PI_1 \cdot PJ_1 &= PA \cdot PB, \\ PI_2 \cdot PJ_2 &= PB \cdot PC, \\ PI_3 \cdot PJ_3 &= PC \cdot PD, \\ PI_4 \cdot PJ_4 &= PD \cdot PA. \end{aligned}$$

From these we get

$$PI_1 \cdot PI_3 \cdot PJ_1 \cdot PJ_3 = PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD = PI_2 \cdot PI_4 \cdot PJ_2 \cdot PJ_4.$$

Thus

$$PI_1 \cdot PI_3 = PI_2 \cdot PI_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad PJ_1 \cdot PJ_3 = PJ_2 \cdot PJ_4.$$

In his proof [16], Woo showed that the quadrilateral has an incircle if and only if the equality to the left is true. Hence the quadrilateral has an incircle if and only if the equality to the right is true. Both of these equalities are conditions for the four points I_1, I_2, I_3, I_4 and J_1, J_2, J_3, J_4 to be concyclic according to the converse of the intersecting chords theorem. □

[7] Here and a few times later on we use the half angle theorems. For a derivation, see [9, p.158].

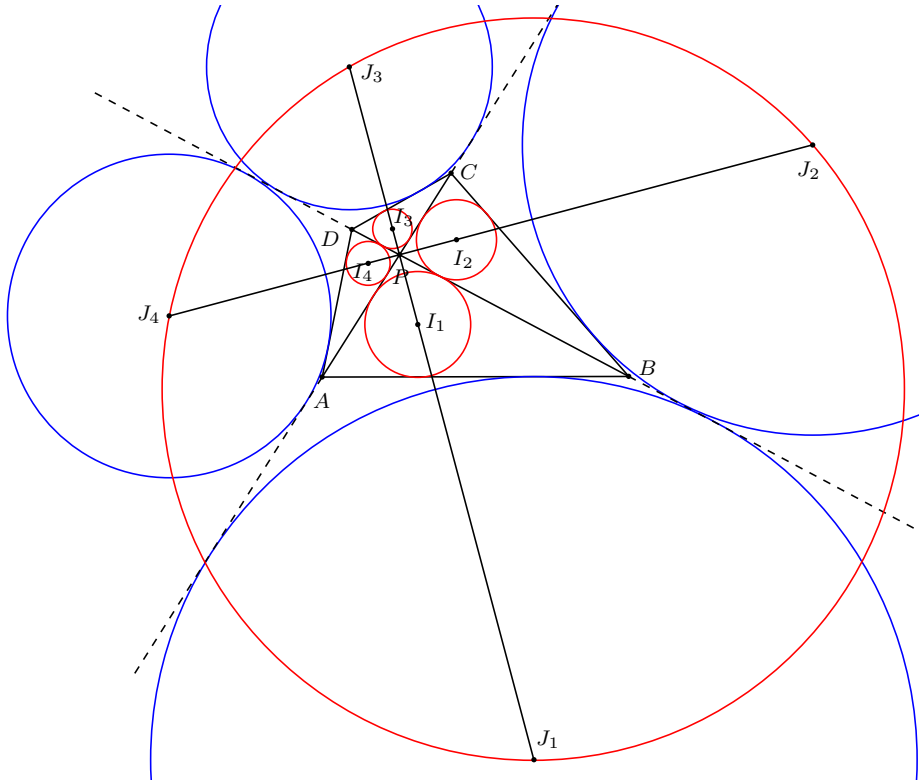


Figure 8. An excircle version of Vaynshtejn's characterization

Figure 8 suggests that $J_1J_3 \perp J_2J_4$ and $I_1I_3 \perp I_2I_4$. These are true in all convex quadrilaterals, and the proof is very simple. The incenters and excenters lies on the angle bisectors to the angles between the diagonals. Hence we have $\angle J_4PJ_1 = \angle I_4PI_1 = \frac{1}{2}\angle DPB = \frac{\pi}{2}$.

Another characterization related to the configuration of Christopher Bradley's conjecture is the following one. This is perhaps not one of the nicest characterizations, but the connection between opposite sides is present here as well as in many others. That the equality in the theorem is true in a tangential quadrilateral was established at [5].

Theorem 6. *A convex quadrilateral $ABCD$ with diagonals intersecting at P is tangential if and only if*

$$\frac{(AP+BP-AB)(CP+DP-CD)}{(AP+BP+AB)(CP+DP+CD)} = \frac{(BP+CP-BC)(DP+AP-DA)}{(BP+CP+BC)(DP+AP+DA)}.$$

Proof. In a triangle ABC with sides a, b and c, the distance from vertex A to the incenter I is given by

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}} = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} = \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}. \quad (5)$$

In a quadrilateral $ABCD$, let the incenters in triangles ABP, BCP, CDP and DAP be I_1, I_2, I_3 and I_4 respectively. Using (5), we get

$$PI_1 = \sqrt{\frac{PA \cdot PB(AP + BP - AB)}{AP + BP + AB}},$$
$$PI_3 = \sqrt{\frac{PC \cdot PD(CP + DP - CD)}{CP + DP + CD}}.$$

Thus in all convex quadrilaterals

$$(PI_1 \cdot PI_3)^2 = \frac{AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP(AP + BP - AB)(CP + DP - CD)}{(AP + BP + AB)(CP + DP + CD)}$$

and in the same way we have

$$(PI_2 \cdot PI_4)^2 = \frac{AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP(BP + CP - BC)(DP + AP - DA)}{(BP + CP + BC)(DP + AP + DA)}.$$

In [16], Woo proved that $PI_1 \cdot PI_3 = PI_2 \cdot PI_4$ if and only if $ABCD$ has an incircle. Hence it is a tangential quadrilateral if and only if

$$\frac{AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP(AP + BP - AB)(CP + DP - CD)}{(AP + BP + AB)(CP + DP + CD)}$$
$$= \frac{AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP(BP + CP - BC)(DP + AP - DA)}{(BP + CP + BC)(DP + AP + DA)}$$

from which the theorem follows. □

5. Iosifescu's characterization

In [13] Nicuşor Minculete cites a trigonometric characterization of tangential quadrilaterals due to Marius Iosifescu from the old Romanian journal [11]. We had never seen this nice characterization before and suspect no proof has been given in English, so here we give one. Since we have had no access to the Romanian journal we don't know if this is the same proof as the original one.

Theorem 7 (Iosifescu)**.** *A convex quadrilateral $ABCD$ is tangential if and only if*

$$\tan\frac{x}{2} \cdot \tan\frac{z}{2} = \tan\frac{y}{2} \cdot \tan\frac{w}{2}$$

where $x = \angle ABD$, $y = \angle ADB$, $z = \angle BDC$ and $w = \angle DBC$.

Proof. Using the trigonometric formula

$$\tan^2\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u},$$

we get that the equality in the theorem is equivalent to

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} = \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} \cdot \frac{1 - \cos w}{1 + \cos w}.$$

This in turn is equivalent to

$$(1 - \cos x)(1 - \cos z)(1 + \cos y)(1 + \cos w)$$
$$= (1 - \cos y)(1 - \cos w)(1 + \cos x)(1 + \cos z). \tag{6}$$

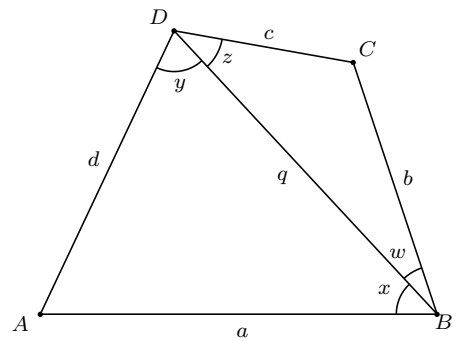


Figure 9. Angles in Iosifescu's characterization

Let $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ and $q = BD$. From the law of cosines we have (see Figure 9)

$$\cos x = \frac{a^2 + q^2 - d^2}{2aq},$$

so that

$$1 - \cos x = \frac{d^2 - (a-q)^2}{2aq} = \frac{(d+a-q)(d-a+q)}{2aq}$$

and

$$1 + \cos x = \frac{(a+q)^2 - d^2}{2aq} = \frac{(a+q+d)(a+q-d)}{2aq}.$$

In the same way

$$1 - \cos y = \frac{(a+d-q)(a-d+q)}{2dq}, \qquad 1 + \cos y = \frac{(d+q+a)(d+q-a)}{2dq},$$

$$1 - \cos z = \frac{(b+c-q)(b-c+q)}{2cq}, \qquad 1 + \cos z = \frac{(c+q+b)(c+q-b)}{2cq},$$

$$1 - \cos w = \frac{(c+b-q)(c-b+q)}{2bq}, \qquad 1 + \cos w = \frac{(b+q+c)(b+q-c)}{2bq}.$$

Thus (6) is equivalent to

$$\frac{(d+a-q)(d-a+q)^2}{2aq} \cdot \frac{(b+c-q)(b-c+q)^2}{2cq} \cdot \frac{(d+q+a)}{2dq} \cdot \frac{(b+q+c)}{2bq}$$
$$= \frac{(a+d-q)(a-d+q)^2}{2dq} \cdot \frac{(c+b-q)(c-b+q)^2}{2bq} \cdot \frac{(a+q+d)}{2aq} \cdot \frac{(c+q+b)}{2cq}.$$

This is equivalent to

$$P\left((d-a+q)^2(b-c+q)^2 - (a-d+q)^2(c-b+q)^2\right) = 0 \tag{7}$$

where

$$P = \frac{(d+a-q)(b+c-q)(d+q+a)(b+q+c)}{16abcdq^4}$$

is a positive expression according to the triangle inequality applied in triangles ABD and BCD. Factoring (7), we get

$$P\big((d-a+q)(b-c+q)+(a-d+q)(c-b+q)\big)$$
$$\cdot\big((d-a+q)(b-c+q)-(a-d+q)(c-b+q)\big)=0.$$

Expanding the inner parentheses and cancelling some terms, this is equivalent to

$$4qP(b+d-a-c)\left((d-a)(b-c)+q^2\right)=0. \tag{8}$$

The expression in the second parenthesis can never be equal to zero. Using the triangle inequality, we have $q>a-d$ and $q>b-c$. Thus $q^2 \gtrless (a-d)(b-c)$.

Hence, looking back at the derivation leading to (8), we have proved that

$$\tan\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{z}{2}=\tan\frac{y}{2}\cdot\tan\frac{w}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad b+d=a+c$$

and Iosifescu's characterization is proved according to the Pitot theorem. □

6. Characterizations with other excircles

We have already seen two characterizations concerning the four excircles opposite the intersection of the diagonals. In this section we will study some other excircles. We begin by deriving a characterization similar to the one in Theorem 6, not for its own purpose, but because we will need it to prove the next theorem.

Theorem 8. *A convex quadrilateral $ABCD$ with diagonals intersecting at P is tangential if and only if*

$$\frac{(AB+AP-BP)(CD+CP-DP)}{(AB-AP+BP)(CD-CP+DP)}=\frac{(BC-BP+CP)(DA-DP+AP)}{(BC+BP-CP)(DA+DP-AP)}.$$

Proof. It is well known that in a triangle ABC with sides a,b and c,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}$$

where s is the semiperimeter [9, p.158]. Now, if P is the intersection of the diagonals in a quadrilateral $ABCD$ and x,y,z,w are the angles defined in Theorem 7, we have

$$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{(AB+AP-BP)(BP+AP-AB)}{(AB+AP+BP)(BP-AP+AB)}},$$

$$\tan\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(CD+CP-DP)(DP+CP-CD)}{(CD+CP+DP)(DP-CP+CD)}},$$

$$\tan\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{(DA+AP-DP)(DP+AP-DA)}{(DA+AP+DP)(DP-AP+DA)}},$$

$$\tan\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{(BC+CP-BP)(BP+CP-BC)}{(BC+CP+BP)(BP-CP+BC)}}.$$

From Theorem 7 we have the equality[8]

$$\tan^2\frac{x}{2}\cdot\tan^2\frac{z}{2}=\tan^2\frac{y}{2}\cdot\tan^2\frac{w}{2}$$

and putting in the expressions above we get

$$\frac{(AB+AP-BP)(BP+AP-AB)(CD+CP-DP)(DP+CP-CD)}{(AB+AP+BP)(BP-AP+AB)(CD+CP+DP)(DP-CP+CD)}$$
$$=\frac{(DA+AP-DP)(DP+AP-DA)(BC+CP-BP)(BP+CP-BC)}{(DA+AP+DP)(DP-AP+DA)(BC+CP+BP)(BP-CP+BC)}.$$

Now using Theorem 6, the conclusion follows.[9] □

Lemma 9. *If J_1 is the excenter opposite A in a triangle ABC with sides a, b and c, then*

$$\frac{(BJ_1)^2}{ac}=\frac{s-c}{s-a}$$

where s is the semiperimeter.

Proof. If R_a is the radius in the excircle opposite A, we have (see Figure 10)

$$\sin\frac{\pi-B}{2}=\frac{R_a}{BJ_1},$$
$$BJ_1\cos\frac{B}{2}=\frac{T}{s-a},$$
$$(BJ_1)^2\cdot\frac{s(s-b)}{ac}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)^2},$$

and the equation follows. Here T is the area of triangle ABC and we used Heron's formula. □

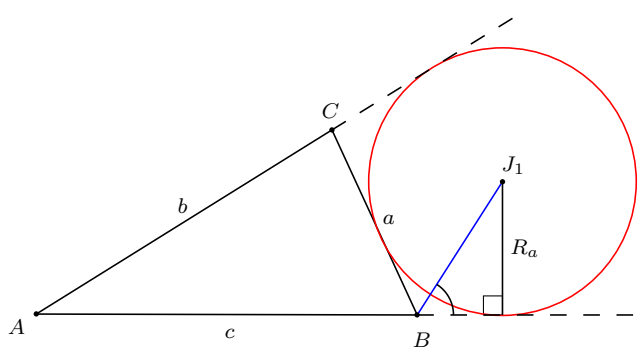


Figure 10. Distance from an excenter to an adjacant vertex

[8]This is a characterization of tangential quadrilaterals, but that's not important for the proof of this theorem.

[9]Here it is important that Theorem 6 is a characterization of tangential quadrilaterals.

Theorem 10. *A convex quadrilateral $ABCD$ with diagonals intersecting at P is tangential if and only if the four excenters to triangles ABP, BCP, CDP and DAP opposite the vertices B and D are concyclic.*

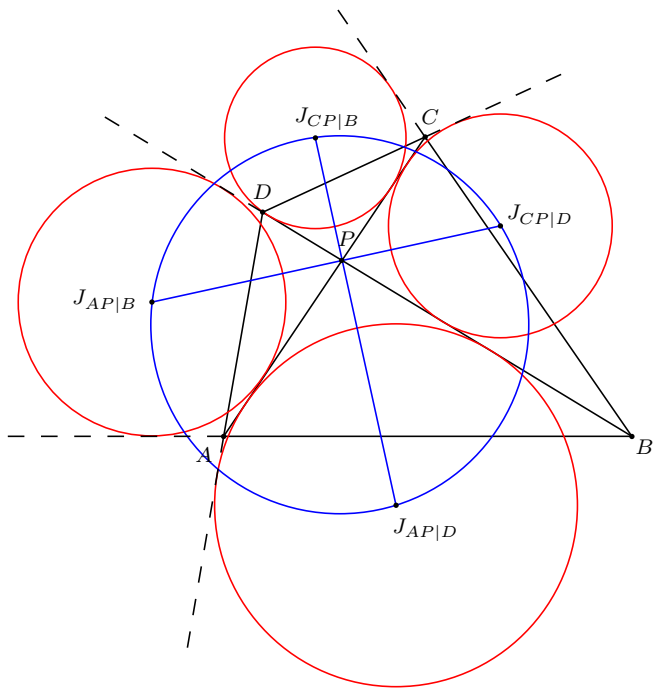


Figure 11. Excircles to subtriangles opposite the vertices B and D

Proof. We use the notation $J_{AP|B}$ for the excenter in the excircle tangent to side AP opposite B in triangle ABP. Using the Lemma in triangles ABP, BCP, CDP and DAP yields (see Figure 11)

$$\frac{(PJ_{AP|B})^2}{AP \cdot BP} = \frac{AB + AP - BP}{AB - AP + BP},$$
$$\frac{(PJ_{CP|D})^2}{CP \cdot DP} = \frac{CD + CP - DP}{CD - CP + DP},$$
$$\frac{(PJ_{CP|B})^2}{CP \cdot BP} = \frac{BC + CP - BP}{BC - CP + BP},$$
$$\frac{(PJ_{AP|D})^2}{AP \cdot DP} = \frac{DA + AP - DP}{DA - AP + DP}.$$

From Theorem 8 we get that $ABCD$ is a tangential quadrilateral if and only if

$$\frac{(PJ_{AP|B})^2}{AP \cdot BP} \cdot \frac{(PJ_{CP|D})^2}{CP \cdot DP} = \frac{(PJ_{CP|B})^2}{CP \cdot BP} \cdot \frac{(PJ_{AP|D})^2}{AP \cdot DP},$$

which is equivalent to

$$PJ_{AP|B} \cdot PJ_{CP|D} = PJ_{CP|B} \cdot PJ_{AP|D}. \tag{9}$$

Now $J_{AP|B}J_{CP|D}$ and $J_{CP|B}J_{AP|D}$ are straight lines through P since they are angle bisectors to the angles between the diagonals in $ABCD$. According to the intersecting chords theorem and its converse, (9) is a condition for the excenters to be concyclic. □

There is of course a similar characterization where the excircles are opposite the vertices A and C.

We conclude with a theorem that resembles Theorem 4, but with the excircles in Theorem 10.

Theorem 11. *A convex quadrilateral $ABCD$ with diagonals intersecting at P is tangential if and only if*

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d},$$

where R_a, R_b, R_c and R_d are the radii in the excircles to triangles ABP, BCP, CDP and DAP respectively opposite the vertices B and D.

Proof. We use notations on the altitudes as in Figure 12, which are the same as in the proof of Theorem 4. From (3) we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_a} &= -\frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_1}, \\
\frac{1}{R_b} &= -\frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_2}, \\
\frac{1}{R_c} &= -\frac{1}{h_D} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_3}, \\
\frac{1}{R_d} &= -\frac{1}{h_D} + \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_4}.
\end{aligned}$$

These yield

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_d} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}.$$

Hence

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_4}.$$

Since the equality to the right is a characterization of tangential quadrilaterals according to (2), so is the equality to the left. □

Even here there is a similar characterization where the excircles are opposite the vertices A and C.

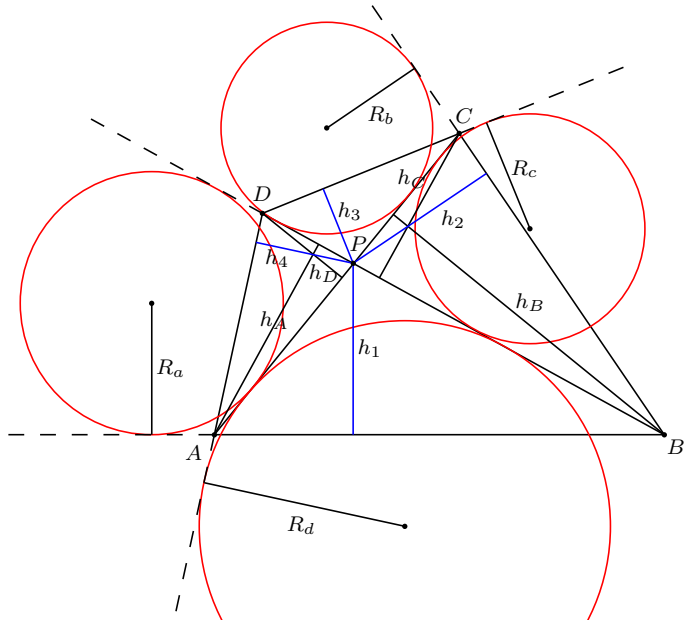


Figure 12. The exradii and altitudes

References

[1] I. Agricola and T. Friedrich, *Elementary geometry*, American Mathematical Society, 2008.
[2] N. Altshiller-Court, *College Geometry*, Dover reprint, 2007.
[3] T. Andreescu and B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, Boston, 2004.
[4] C. J. Bradley, Cyclic quadrilaterals, *Math. Gazette*, 88 (2004) 417–431.
[5] crazyman (username), tangential quadrilateral, *Art of Problem Solving*, 2010, `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=334860`
[6] N. Dergiades, Hyacinthos message 8966, January 6, 2004.
[7] F. G.-M, *Exercices de Géométrie*, Cinquième édition (in French), Éditions Jaques Gabay, 1912.
[8] D. Grinberg, Hyacinthos message 9022, January 10, 2004.
[9] E. W. Hobson, *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Seventh Edition, Dover Publications, 1957.
[10] R. Honsberger, *In Pólya's Footsteps*, Math. Assoc. Amer., 1997.
[11] M. Iosifescu, Problem 1421, *The Mathematical Gazette* (in Romanian), no. 11, 1954.
[12] K. S. Kedlaya, *Geometry Unbound*, 2006, available at `http://math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/`
[13] N. Minculete, Characterizations of a tangential quadrilateral, *Forum Geom.*, 9 (2009) 113–118.
[14] V. Prasolov, *Problems in Plane and Solid Geometry*, translated and edited by D. Leites, 2006, available at `http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf`
[15] Rafi (username), Hyacinthos message 8910, January 2, 2004.
[16] T. Seimiya and P. Y. Woo, Problem 2338, *Crux Math.*, 24 (1998) 234; solution, ibid., 25 (1999) 243–245.
[17] sfwc (username), A conjecture of Christopher Bradley, *CTK Exchange*, 2003, `http://www.cut-the-knot.org/cgi-bin/dcforum/forumctk.cgi?az=read_count&om=383&forum=DCForumID6`
[18] I. Vaynshtejn, Problem M1524, *Kvant* (in Russian) no. 3, 1996 pp. 25-26, available at `http://kvant.mccme.ru/1996/03/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm`

[19] C. Worrall, A journey with circumscribable quadrilaterals, *Mathematics Teacher*, 98 (2004) 192–199.
[20] W. C. Wu and P. Simeonov, Problem 10698, *Amer. Math. Monthly*, 105 (1998) 995; solution, ibid., 107 (2000) 657–658.

Martin Josefsson: Västergatan 25d, 285 37 Markaryd, Sweden
E-mail address: `martin.markaryd@hotmail.com`

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

The Future of Secondary School Geometry

Michael de Villiers
Mathematics Education, University of Durban-Westville

Introduction

Recently in a *Mathematical Digest* (Jul '96, no. 104:26) published by the Mathematics Department at UCT someone wrote the following:

> "*... South Africa is the habitat of an endangered species, for Euclidean Geometry has disappeared from the syllabuses of most other countries ...*"

Such a statement is rather common amongst many mathematicians and mathematics educators in South Africa. However, geometry is alive and well, and experiencing an exciting rebirth in many countries; not only at school level, but at university level as well. The geometry done at school level in many countries may of course be not as highly formalised as in our senior secondary phase, and their interpretation of geometry usually goes well beyond a narrow Euclidean view. There is great danger if policy makers in mathematics education in South Africa are unaware of these dramatic new developments.

Some developments in contemporary geometry

The only geometry most South Africans know is the Euclidean geometry they learnt at school. Furthermore, there appears to be a belief that the old Greeks and other civilizations before them had discovered all the geometry there is to know. Very few realize that many exciting new results in Euclidean geometry were discovered in the nineteenth and twentieth centuries, for example, the theorems of Morley, Miquel, Feuerbach, Steiner, etc.

Apart from that, the previous century saw the development of the non-Euclidean geometries of Lobachevsky-Bolyai and Riemann. The counter-intuitive axioms for these two geometries completely revolutionized mathematicians' understanding of the nature of axioms. Whereas many had previously believed that axioms were "*self-evident truths*", they now realized that they were simply "*necessary starting points*" for mathematical systems. From believing that mathematics dealt with "*absolute truths*" in relation to the real world, they for the first time realized that mathematics only dealt with "*propositional truths*" which may or may not have applications in the real world, and in fact, that applicability was not a necessary criteria for mathematics.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

In Table 1 two examples from the respective non-Euclidean geometries of Lobachevsky-Bolyai and Riemann are given. Respective models are the so-called Poincare' disk and the geometry of the sphere.

Lobachevsky-Bolyai	Riemann
(Playfair) Axiom: Through a point P not on a line l at least two lines parallel to l can be drawn.	(Playfair) Axiom: Through a point P not on a line l no lines parallel to l can be drawn.
Theorem: The angle sum of a triangle is less than 180 degrees and its area is proportional to the "defect" of its angle sum.	Theorem: The angle sum of a triangle is more than 180 degrees and its area is proportional to the "excess" of its angle sum.

Table 1

The previous century also saw the axiomatic development of projective geometry whose origins can be traced way back to Pappus (350 AD) and Desargues (1639). A major breakthrough was the discovery and independent proof of the principle of *duality* by Poncelet, Plucker and Gergonne in 1826. Two theorems or configurations are called *dual* if the one may be obtained from the other by replacing each concept and operator by its dual concept and operator. In projective geometry we find the following duality:

vertices (points)	-	sides (lines)
inscribed in a circle	-	circumscribed around a circle
collinear	-	concurrent

This duality is strikingly reflected by the projective theorems of Pascal (1623 - 1662) and Brianchon (1785 - 1864) as follows:

Pascal's theorem

If a hexagon is *inscribed* in a circle, then the three *points of intersection of the opposite sides* are *collinear* (lie in a straight line) (Figure 1a).

Brianchon's theorem

If a hexagon is *circumscribed* around a circle, then the three *lines* (the diagonals) *connecting opposite vertices* are *concurrent* (meet in the same point) (Figure 1b).

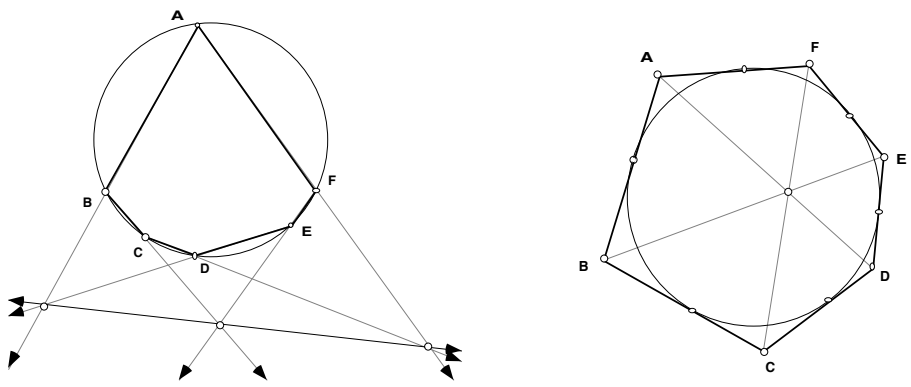


Figure 1: Pascal's & Brianchon's theorems

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

Although the initial axiomatic treatment of projective geometry was purely synthetic, gradual incorporation of analytical methods occurred in the latter part of the previous century. Most notably was Klein's famous *Erlangen*-program (1872) which described geometry as the study of those geometric properties which remain *invariant* (unchanged) under the various groups of transformations. In short, geometry could be classified according to this view as follows:

- *isometries* - transformations of plane figures which preserve all distances and angles (congruency)
- *similarities* - transformations of plane figures where shape (similarity) is preserved
- *affinities* - transformations of plane figures where parallelism is preserved
- *projectivities* - transformations of plane figures which preserve the collinearity of points and the concurrency of lines
- *topologies* - transformations of plane figures which preserve closure and orientability

Since time immemorial, one- and two-dimensional geometric patterns have been used by human beings to adorn their dwellings, clothes and implements. Figure 2a for example shows a Moorish tiling from the Alambra in the south of Spain. The Dutch artist Maurits Escher used tessellations extensively in the production of his artwork in the period 1937-1971. (See Figure 2b for an Escher-like tessellation, and also, Schattschneider, 1990)). Interestingly, the study of border patterns and tessellations (tilings) has received unprecedented interest by mathematicians in the twentieth century. Nevertheless, in the seventies a housewife Marjorie Rice discovered four new convex pentagons that tessellate, although mathematicians had thought at that stage that the list of tessellating pentagons was complete (see Schattschneider, 1981). Most recently, Grunbaum & Shepherd (1986) produced a systematic investigation of symmetry in tilings and tessellations which to some degree equals Euclides' *Elements*.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

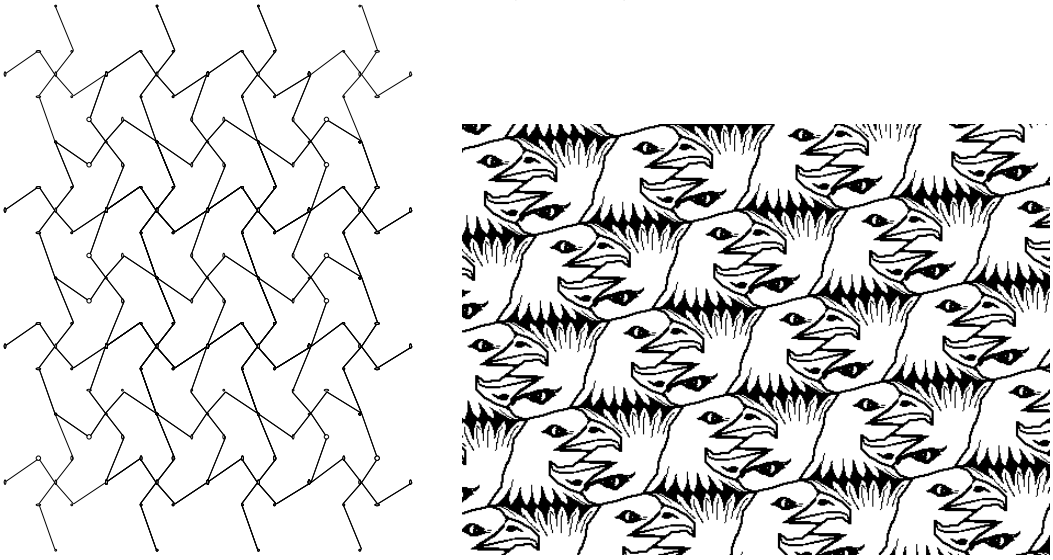
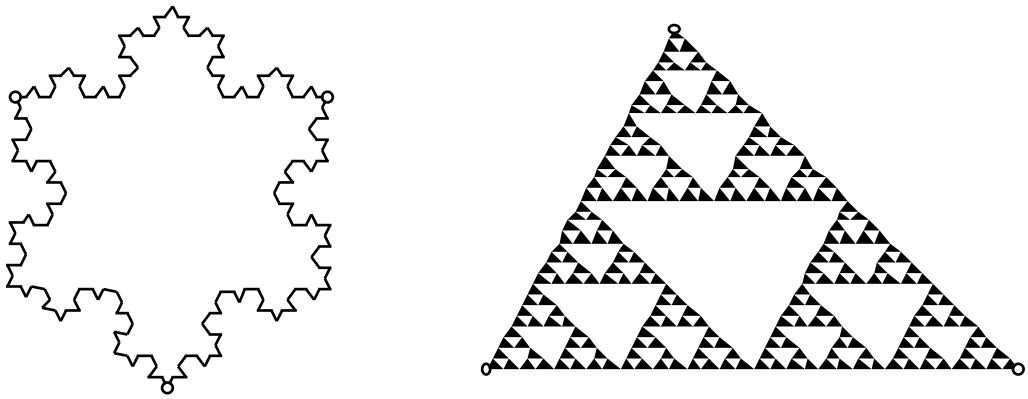


Figure 2: Examples of tessellations

One of the important concepts in the classification of border patterns and tessellations is that of *symmetry* . Using this concept, border patterns can be classified into seven different types and tessellations into seventeen different types. An obvious property of any tiling is that of a repetition of the pattern. If a tiling has translational symmetry in two independent directions it is called *periodic*. Although most common tilings are periodic, only about twenty years ago, the British mathematician Penrose discovered a surprising set of two quadrilaterals that tile non-periodically (eg. see Benade, 1995). In fact, it is still an open question whether or not a single tile exists with which one can only tile non-periodically.

Another interesting development in recent years has been *fractal* geometry, which is the study of geometrical objects with fractional dimensions. For example, a cloud is a good example of a fractal. Although it is not really quite three-dimensional, it is certainly not two-dimensional; one could therefore say that its dimensions lie somewhere between twee and three. In fact, many real world objects such as coastlines, fern leaves, mountain ranges, trees, crystals, etc. have fractal properties. Fractal image compression is also used today in a variety of multimedia and other image-based computer applications. An important property of fractals is that of *self-similarity* which loosely means that any small subset of the figure is similar to the larger figure. Two examples of fractals are given in Figure 3 where this property is clearly illustrated.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.



Koch Snowflake Sierpinski Triangle

Figure 3: Examples of fractals

Recent years have also seen the development and expansion of Knot Theory and its increased application to biology, the use of Projective Geometry in the design of virtual reality programs, the application of Coding Theory to the design of CD players, an investigation of the geometry involved in robotics, etc. Even Soap Bubble Geometry is receiving new attention as illustrated by the special session given to it at the Burlington MathsFest in 1995. In 1986 Eugene Krause wrote a delightful little book on Taxicab Geometry, introducing a new kind of non-Euclidean geometry. Several international conferences on geometry have been held over the past decade. In fact, David Henderson from Cornell University, USA recently told the author that presently they have more post-graduate students in geometry or geometry related fields than in pure algebra.

Even Euclidean geometry is experiencing an exciting revival, in no small part due to the recent development of dynamic geometry software such as *Cabri* and *Sketchpad*. In fact, Philip Davies (1995) describes a possibly rosy future for research in triangle geometry. Recently Adrian Oldknow (1995, 1996) for example used *Sketchpad* to discover the hitherto unknown result that the Soddy center, incenter and Gergonne point of a triangle are collinear (amongst other interesting results). The Soddy center is named after the Nobel prizewinning chemist, Frederick Soddy, who published the following result in 1936: If three circles with centers at the three vertices of a triangle are drawn tangent to each other as shown in Figure 4 (each triangle has a unique set of three such circles), then there exists a fourth circle tangent to all three as shown. (The center of this circle is now known as the (inner) Soddy center S - there is also an outer one).

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

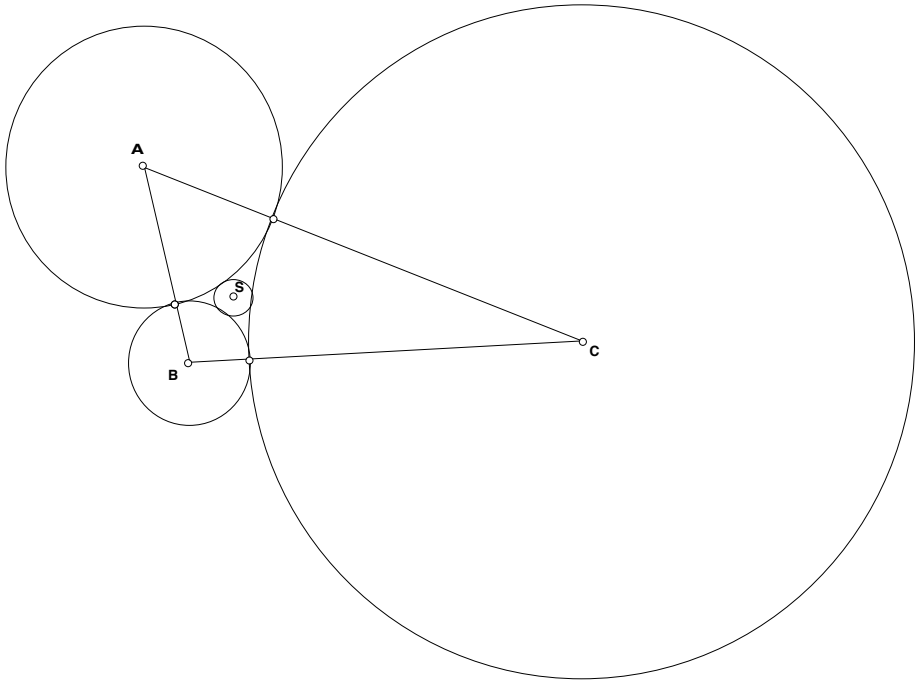


Figure 4: Soddy center

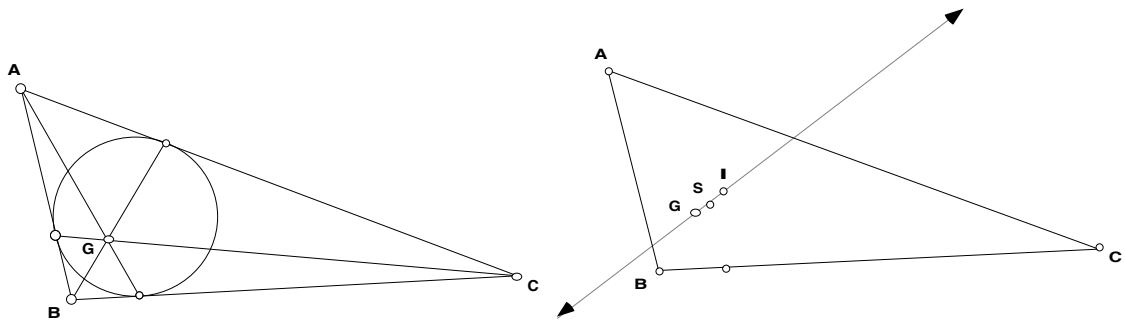


Figure 5: Gergonne point & Gergonne-Soddy-Incenter line

The Gergonne point G of a triangle is the point of concurrency of the three line segments from the vertices to the points of tangency of the incircle with the opposite sides (see Figure 5a). (The Gergonne point incidentally is just a special degenerate case of Brianchon's theorem). Then as shown in Figure 5b, we find the surprising result that the Gergonne point G, the Soddy center S and the incenter I are collinear. (The outer Soddy center also lies on this line).

The author also recently discovered two interesting generalizations of Van Aubel's theorem using dynamic geometry software. This theorem states that if squares are constructed on the sides of any quadrilateral then the line segments connecting the centers of the squares of opposite sides are always equal and perpendicular (see Yaglom, 1962 or Kelly, 1966). After some experimentation, the author managed to further generalize it for similar rectangles and rhombi on the sides as shown in Figures 6 & 7 (proofs are given in De Villiers, 1996 & 1997). In Figure 6, *EG* is always perpendicular to *FH*. Also *KM* is congruent to *LN* where *K*, *L*,

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

M and *N* are the midpoints of the line segments joining adjacent vertices of the similar rectangles as shown.

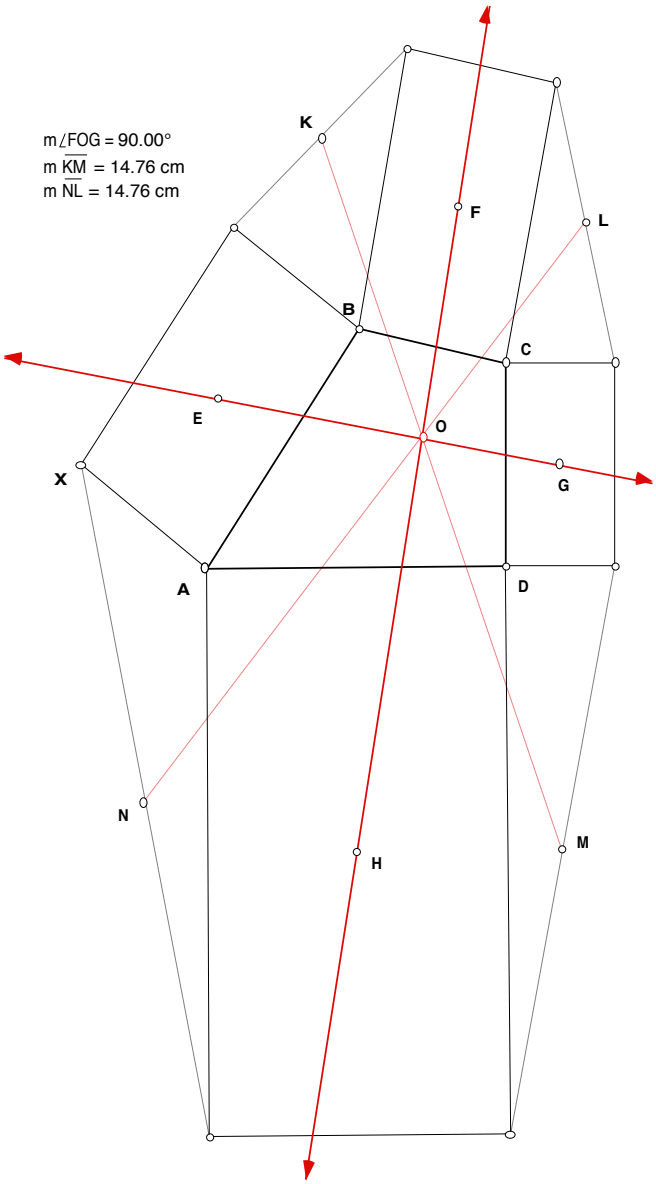


Figure 6: Van Aubel rectangle-generalisation

In Figure 7, *EG* is always congruent to *FH*. Also *KM* is perpendicular to *LN* where *K*, *L*, *M* and *N* are the midpoints of the linesegments joining adjacent vertices of the similar rhombi as shown. The "intersection" of these two results therefore provides Van Aubel's theorem.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

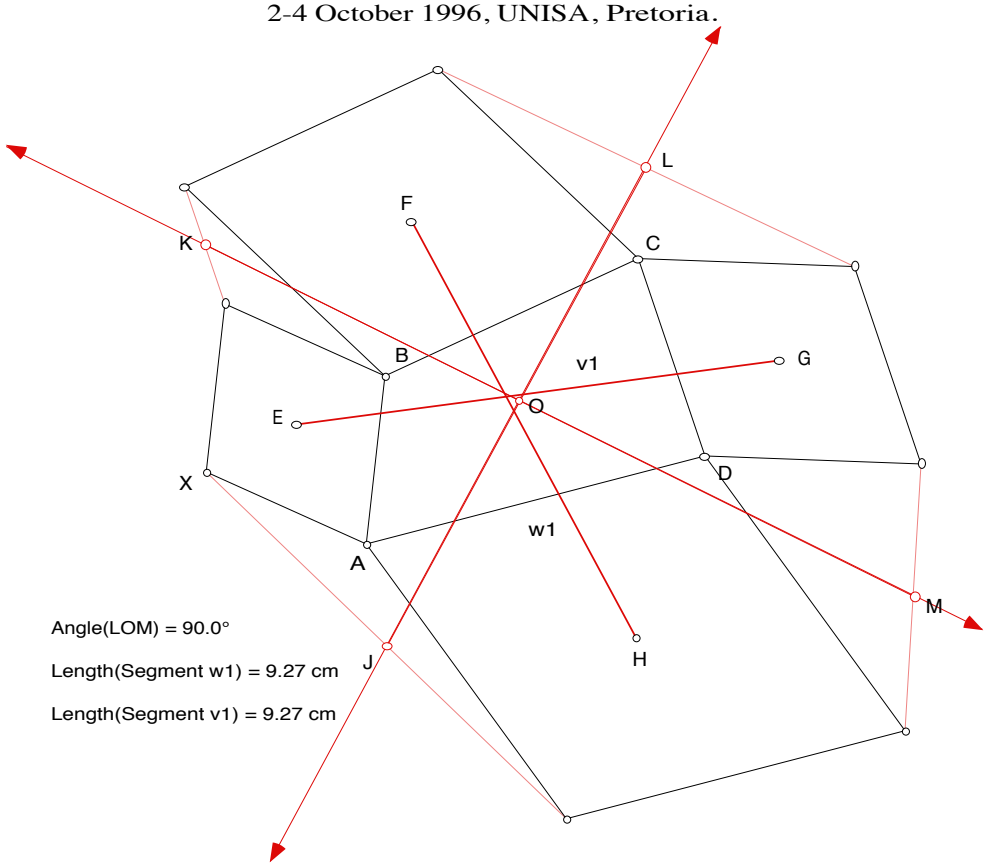


Figure 7: Van Aubel rhombus-generalisation

Just a brief perusal of some recent issues of mathematical journals like the *Mathematical Intelligencer*, *American Mathematical Monthly*, *The Mathematical Gazette*, *Mathematics Magazine*, *Mathematics & Informatics Quarterly*, etc. easily testify to the increased activity and interest in traditional Euclidean geometry involving triangles, quadrilaterals and circles. The mathematician Crelle once said: "*It is indeed wonderful that so simple a figure as the triangle is so inexhaustible in properties*". Perhaps this applies even more widely to Euclidean geometry in general!

Some developments in geometry education

The Van Hiele theory

The Van Hiele theory originated in the respective doctoral dissertations of Dina van Hiele-Geldof and her husband Pierre van Hiele at the University of Utrecht, Netherlands in 1957. Dina unfortunately died shortly after the completion of her dissertation, and Pierre was the one who developed and disseminated the theory further in later publications.

While Pierre's dissertation mainly tried to explain why pupils experienced problems in geometry education (in this respect it was **explanatory** and **descriptive**), Dina's dissertation was about a teaching experiment and in that sense is more **prescriptive** regarding the ordering of geometry content and

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

learning activities of pupils. The most obvious characteristic of the theory is the distinction of five discrete thought levels in respect to the development of pupils' understanding of geometry. Four important characteristics of the theory are summarised as follows by Usiskin (1982:4):

- **fixed order** - The order in which pupils progress through the thought levels is invariant. In other words, a pupil cannot be at level *n* without having passed through level *n-1*.
- **adjacency** - At each level of thought that which was intrinsic in the preceding level becomes extrinsic in the current level.
- **distinction** - Each level has its own linguistic symbols and own network of relationships connecting those symbols.
- **separation** - Two persons who reason at different levels cannot understand each other.

The main reason for the failure of the traditional geometry curriculum was attributed by the Van Hieles to the fact that the curriculum was presented at a higher level than those of the pupils; in other words they could not understand the teacher nor could the teacher understand why they could not understand! Although the Van Hiele theory distinguishes between five different levels of thought, we shall here only focus on the first four levels as they are the most pertinent ones for our secondary school geometry. The general characteristics of each level can be described as follows:

Level 1: Recognition

Pupils visually recognize figures by their global appearance. They recognize triangles, squars, parallelograms, and so forth by their shape, but they do not explicitly identify the properties of these figures.

Level 2: Analysis

Pupils start analysing the properties of figures and learn the appropriate technical terminology for describing them, but they they do not interrelate figures or properties of figures.

Level 3: Ordering

Pupils logically order the properties of figures by short chains of deductions and understand the interelationships between figures (eg. class inclusions).

Level 4: Deduction

Pupils start developing longer sequences of statements and begin to understand the significance of deduction, the role of axioms, theorems and proof.

The differences between the first three levels can be summarised as shown in Table 2 in terms of the objects and structure of thought at each level (adapted from Fuys et al, 1988:6).

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

	Level 1	Level 2	Level 3
Objects of thought **Structure of thought**	**Individual figures** **Visual recognition** **Naming** **Visual sorting**	**Classes of figures** **Recognizing properties as characteristics of classes**	**Definitions of classes of figures** **Noticing & formulating logical relationships between properties**
Examples	**• Parallelograms all go together because they "look the same"** **• Rectangles, squares and rhombi are not parms because they do "not look like one"**	**A parallelogram has:** **• 4 sides** **• opp. angles =** **• opp. sides =** **• opp. sides //** **• bisecting diagonals; etc.** **A rectangle is not a parm since a rectangle has 90° angles but a parm not.**	**• Opposite sides = imply opposite sides //** **• Opposite sides // imply opposite sides =** **• opposite angles = imply opp. sides =** **• bisecting diagonals imply half-turn symmetry**

Table 2

By using task-based interviews, Burger & Shaughnessy (1986) characterized pupils' thought levels at the first four levels more fully as follows:

Level 1

(1) Often use irrelevant visual properties to identify figures, to compare, to classify and to describe.

(2) Usually refer to visual prototypes of figures, and is easily misled by the orientation of figures.

(3) An inability to think of an infinite variation of a particular type of figure (eg in terms of orientation and shape).

(4) Inconsistent classifications of figures; for example, using non-common or irrelevant properties to sort figures.

(5) Incomplete descriptions (definitions) of figures by viewing necessary (often visual) conditions as sufficient conditions.

Level 2

(1) An explicit comparison of figures in terms of their underlying properties.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

(2) Avoidance of class inclusions between different classes of figures, eg. squares and rectangles are considered to be disjoint.

(3) Sorting of figures only in terms of one property, for example, properties of sides, while other properties like symmetries, angles and diagonals are ignored.

(4) Exhibit an uneconomical use of the properties of figures to describe (define) them, instead of just using sufficient properties.

(5) An explicit rejection of definitions supplied by other people, eg. a teacher or textbook, in favour of their own personal definitions.

(6) An empirical approach to the establishment of the truth of a statement; eg. the use of observation and measurement on the basis of several sketches.

Level 3

(1) The formulation of economically, correct definitions for figures.

(2) An ability to transform incomplete definitions into complete definitions and a more spontaneous acceptance and use of definitions for new concepts.

(3) The acceptance of different equivalent defintions for the same concept.

(4) The hierarchical classification of figures, eg. quadrilaterals.

(5) The explicit use of the logical form "*if* ... *then*' in the formulation and handling of conjectures, as well as the implicit use of logical rules such as *modus ponens*.

(6) An uncertainty and lack of clarity regarding the respective functions of axioms, definitions and proof.

Level 4

(1) An understanding of the respective functions (roles) of axioms, definitions and proof.

(2) Spontaneous conjecturing and self-initiated efforts to deductively verify them.

Russian research on geometry education

Geometry has always formed an extremely prominent part of the Russian mathematics curriculum in the nineteenth and twentieth centuries. This proud tradition was no doubt influenced by (and instrumental in) the achievements of several famous Russian geometers (like Lobachevsky) in the past two centuries. Traditionally the Russian geometry curriculum consisted of two phases, namely, an *intuitive* phase for Grades 1 to 5 and a *systematisation* (deductive) phase from Grade 6 (12/13 year old).

In the late sixties Russian (Soviet) researchers undertook a comprehensive analysis of both the intuitive and the systematisation phases in order to try and find an answer to the disturbing question of why pupils who were making good

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.
progress in other school subjects, showed little progress in geometry. In their analysis, the Van Hiele theory played a major part. For example, it was found that that at the end of Grade 5 (before the resumption of the systematisation phase which requires at least Level 3 understanding) only 10-15% of the pupils were at Level 2.

The main reason for this was the insufficient attention to geometry in the primary school. For example, in the first five years, pupils were expected to become acquainted, via mainly Level 1 activities, with only about 12-15 geometrical objects (and associated terminology). In contrast, it was expected of pupils in the very first topic treated in the first month of Grade 6 to become acquainted not only with about 100 new objects and terminology, but it was also being dealt with at Level 3 understanding. (Or frequently, the teacher had to try and introduce new content at 3 different levels simultaneously). No wonder they described the period between Grades 1 and 5 as a "*prolonged period of geometric inactivity*"!

The Russians subsequently designed a very successful experimental geometry curriculum based on the Van Hiele theory. They found that an important factor was the continuous sequencing and development of concepts from Grade 1. As reported in Wirszup (1976: 75-96), the average pupil in Grade 8 of the experimental curriculum showed the same or better geometric understanding than their Grade 11 and 12 counterparts in the old curriculum.

The primary & middle school geometry curriculum

The parallels from the Russian experience to South Africa are obvious. We still have a geometry curriculum heavily loaded in the senior secondary school with formal geometry, and with relatively little content done informally in the primary school. (Eg. how much similarity or circle geometry is done in the primary school?) In fact, it is well known that on average, pupils' performance in matric (Grade 12) geometry is far worse than in algebra. Why?

The Van Hiele theory supplies an important explanation. For example, research by De Villiers & Njisane (1987) has shown that about 45% of black pupils in Grade 12 (Std 10) in KwaZulu had only mastered Level 2 or lower, whereas the examination assumed mastery at Level 3 and beyond! Similar low Van Hiele levels among secondary school pupils have been found by Malan (1986), Smith & De Villiers (1990) and Govender (1995). In particular, the transition from Level 1 to Level 2 poses specific problems to second language learners, since it involves the acquisition of the technical terminology by which the properties of figures need to be described and explored. This requires sufficient time which is not available in the presently overloaded secondary curriculum.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

It seems clear that no amount of effort and fancy teaching methods at the secondary school will be successful, unless we embark on a major revision of the primary school geometry curriculum along Van Hiele lines. The future of secondary school geometry thus ultimately depends on primary school geometry!

In Japan for example pupils already start off in Grade 1 with extended tangram, as well as other planar and spatial, investigations (eg. see Nohda, 1992). This is followed up continuously in following years so that by Grade 5 (Std 3) they are already dealing formally with the concepts of congruence and similarity, concepts which are only introduced in Grades 8 and 9 (Stds 6 & 7) in South Africa. No wonder that in international comparative studies in recent years, Japanese school children have consistently outperformed school children from other countries.

Although the recent introduction of tessellations in our primary schools is to be greatly welcomed, many teachers and textbook authors do not appear to understand its relevance in relation to the Van Hiele theory. Although tessellations have great aesthetic attraction due to their intriguing and artistically pleasing patterns, the fundamental reason for introducing it in the primary school is that it provides an intuitive visual foundation (Van Hiele 1) for a variety of geometric content which can later be treated more formally in a deductive context.

For example, in a triangular tessellation pattern such as shown in Figure 8, one could ask pupils the following questions:

(1) identify and colour in parallel lines

(2) what can you say about angles A, B, C , D and E and why?

(3) what can you say about angles A, 1, 2, 3 and 4 and why?

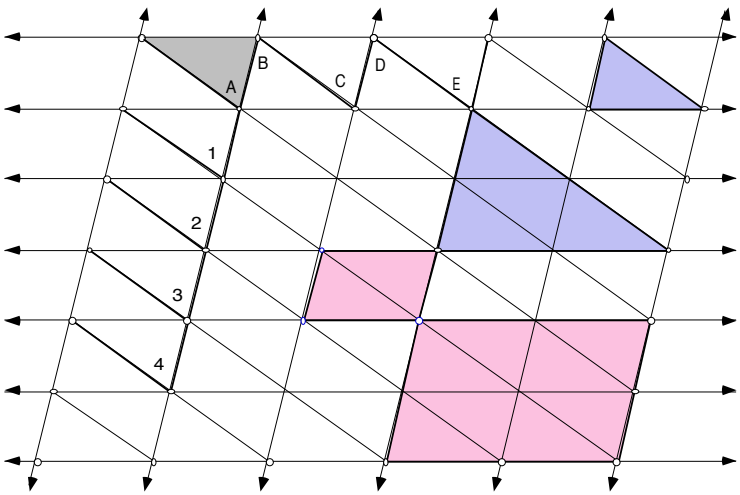


Figure 8: Visualisation

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

In such an activity pupils will realize that angles A, B, C, D and E are all equal since a halfturn of the grey triangle around the midpoint of the side AB maps angle A onto angle B, etc. In this way, pupils can be introduced for the first time to the concept of "*saws*" or "*zig-zags*" (alternate angles). Similarly, pupils should realize that angles A, 1, 2, 3 and 4 are all equal since a translation of the grey triangle in the direction of angles 1, 2, 3 and 4 consecutively maps angle A onto each of these angles. In this way, pupils can be introduced for the first time to the concept of "*ladders*" (corresponding angles). Pupils should further be encouraged to find different saws and ladders in the same and other tessellation patterns to improve their visualisation ability.

Since each tile has to be identical and can be made to fit onto each other exactly by means of translations, rotations or reflections pupils can easily be introduced to the concept of congruency. Pupils can also be asked to look for different shapes in such tessellation patterns, eg. parallelograms, trapezia and hexagons. They could also be encouraged to look for larger figures with the *same shape*, thus intuitively introducing them to the concept of *similarity* (as shown in Figure 8 by the shaded similar triangles and parallelograms).

Tessellations also provide a suitable context for the analysis of the properties of geometric figures (Van Hiele 2), as well as their logical explanation (Van Hiele 3). For example, after pupils have constructed a triangular tessellation pattern as shown in Figure 9, one could ask them questions like the following:

(1) What can you say about angles A and B in relation to D and E? Why? What can you therefore conclude from this?

(2) What can you say about angles F and G in relation to angles H and I? Why? What can you therefore conclude from this?

(3) What can you say about line segment JK in relation to line segment LM? Why? What can you therefore conclude from this?

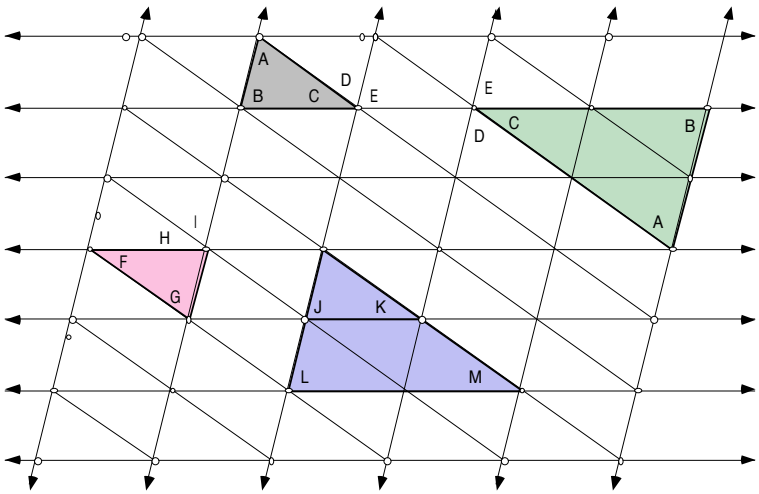


Figure 9: Analysing

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

In the first case, pupils can again see that angle A = angle D due to a saw being formed. Also angle B = angle E due to a ladder. It is then easy for them to observe that since the three angle lie on a straight line, that the sum of the angles of triangle ABC must be equal to a straight line. They can also observe that this is true at any vertex, as well as for any size triangle or orientation, thus enabling generalization. In the second case, the exterior angle theorem is introduced and in the third case, the midpoint theorem. Such analyses are clearly just a short step away from the standard geometric explanations (proofs); all they now need is some formalisation. In Figure 10 the three levels are illustrated for the discovery and explanation that the opposite angles of a parallelogram are equal.

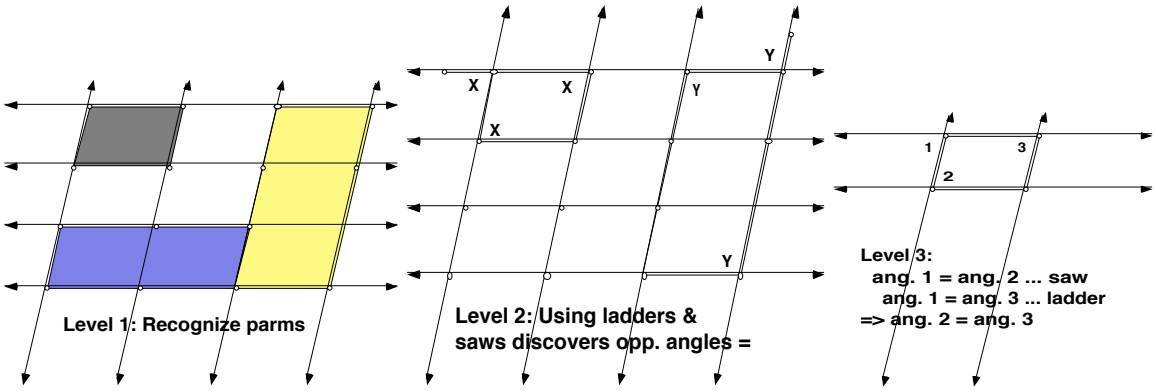


Figure 10: Three levels

Another important aspect of the Van Hiele theory is that it emphasizes that informal activities at Levels 1 and 2 should provide appropriate "*conceptual substructures*" for the formal activities at the next level. I've often observed teachers and student teachers who let pupils measure and add the angles of a triangle for them to discover that they add up to 180°. From a Van Hiele perspective this is totally inappropriate as it does not provide a suitable conceptual substructure in which the formal proof is implicitly embedded. In comparison, the earlier described tessellation activity clearly provides such a substructure. Similarly, the activity of measuring the base angles of an isosceles triangle is conceptually inappropriate, but folding it around its axis of symmetry lays the foundation for a formal proof later. The same applies to the investigation of the properties of the quadrilaterals. For example, it is conceptually inappropriate to measure the opposite angles of a parallelogram to let pupils discover that they are equal. It is far better to let them give the parallelogram a half-turn to find that opposite angles (and sides) map onto each other, as this generally applies to all parallelograms and contains the conceptual seeds for a formal proof.

Recently I had a conversation with a teacher who quickly dismissed a fellow teacher's introduction to tessellations who first let his pupils pack out little

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

card board tiles. This teacher felt that it produced untidy patterns, was ineffective and time consuming, and that one should just start by providing pupils with ready-made square or triangular grids and show them how they can then easily draw neat tessellation patterns (see Figure 11). Although such grids are a useful and effective way of drawing neat patterns, it is conceptually extremely important for pupils to first have had prior experience of physically packing out tiles, ie. rotating, translating, reflecting the tiles by hand. The problem is that it is possible to draw tessellation patterns on such grids without any clear understanding of the underlying isometries which create them, which in turn are conceptually important for analysing the geometric properties embedded in the pattern.

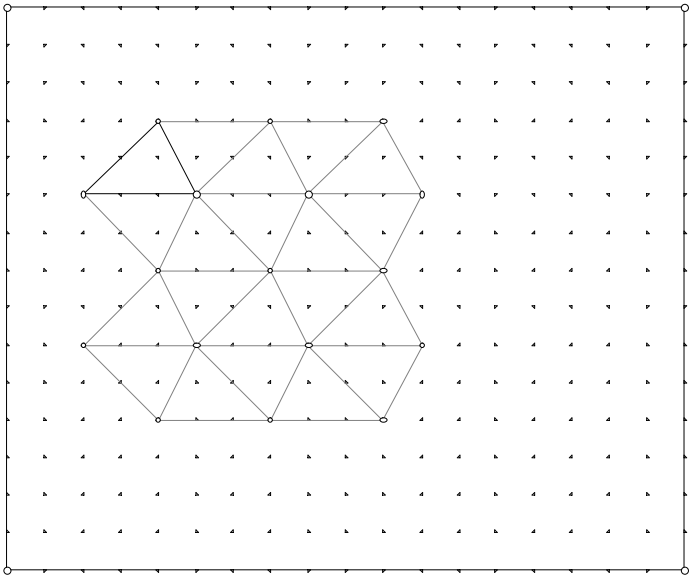


Figure 11: Using grids

Process versus product teaching in geometry

The distinction between "*processes*" and "*products*" in mathematics education is a relatively old one. With a product is meant here the end-result of some mathematical activity which preceded it. As far back as 1978, the Syllabus Proposals of MASA regarding the South African Mathematics Project, stated:

> "*The intrinsic value of mathematics is not only contained in the PRODUCTS of mathematical activity (i.e. polished concepts, definitions, structures and axiomatic systems, but also and especially in the PROCESSES of MATHEMATICAL ACTIVITY leading to such products, e.g. generalization, recognition of pattern, defining, axiomatising. The draft syllabi are intended to reflect an increased emphasis on genuine mathematical activity as opposed to the mere assimilation of the finished products of such activity. This emphasis is particularly reflected in the various sections on geometry.*" - MASA (1978:3)

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

Regrettably these good intentions, except for a few schools, were hardly implemented on a large scale in South African schools. Most teachers and textbook authors simply continued providing pupils with ready-made content that they merely had to assimilate and regurgitate in tests and exams.

Traditional geometry education of this kind can be compared to a cooking and bakery class where the teacher only shows pupils cakes (or even worse, only pictures of cakes) without showing them what goes into the cake and how it is made. In addition, they're not even allowed to try their own hand at baking!

The distinction between some of the main processes and products of formal geometry can be summarised as shown in Table 3. Most formal products often require a number of prior processes, some of which have been indicated. The process of proving also has its own product, namely a proof, which should be distinguished from the theorem, definition or axiom to which it refers.

Product	Process
Axioms	**Axiomatizing**
	• proving
Definitions	**Defining**
	• experimenting
	• proving
Algorithms	**Algorithm construction & verification**
Theorems	**Theorem finding & formulating**
	• Experimenting
	• Refuting
	• Pattern finding
	• Generalizing
	• Specializing
	• Visualising
	• Proving
Classifications	**Classifying**

Table 3

Due to limitations of space, we shall here mainly focus on the handling of definitions at Van Hiele Level 3. The direct teaching of geometry definitions with no emphasis on the underlying process of defining has often been criticised by mathematicians and mathematics educators alike. For example, already in 1908 Benchara Blandford wrote (quoted in Griffiths & Howson, 1974: 216-217):

> "*To me it appears a radically vicious method, certainly in geometry, if not in other subjects, to supply a child with ready-made definitions, to be subsequently memorized after being more or less carefully explained. To*

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

do this is surely to throw away deliberately one of the most valuable agents of intellectual discipline. The evolving of a workable definition by the child's own activity stimulated by appropriate questions, is both interesting and highly educational."

The well-known mathematician Hans Freudenthal (1973:417-418) also strongly criticized the traditional practice of the direct provision of geometry definitions as follows:

"*... most definitions are not preconceived but the finishing touch of the organizing activity. The child should not be deprived of this privilege ... Good geometry instruction can mean much - learning to organize a subject matter and learning what is organizing, learning to conceptualize and what is conceptualizing, learning to define and what is a definition. It means leading pupils to understand why some organization, some concept, some definition is better than another. Traditional instruction is different. Rather than giving the child the opportunity to organize spatial experiences, the subject matter is offered as a preorganized structure. All concepts, definitions, and deductions are preconceived by the teacher, who knows what is its use in every detail - or rather by the textbook author who has carefully built all his secrets into the structure.*"

From our preceding discussion of the Van Hiele theory it should be clear that understanding of formal definitions only develop at Level 3, and that the direct provision of formal definitions to pupils at lower levels would be doomed to failure. In fact, if we take the constructivist theory of learning seriously (namely that knowledge simply cannot be transferred directly from one person to another, and that meaningful knowledge needs to be actively (re)-constructed by the learner), we should even at Level 3 engage pupils in the activity of defining and allow them to choose their own definitions at each level. This implies allowing the following kinds of meaningful definitions at each level:

Van Hiele 1

Visual definitions, eg. a rectangle is a quadrilateral with all angles 90° and two long and two short sides.

Van Hiele 2

Uneconomical definitions, eg. a rectangle is a quadrilateral with opposite sides parallel and equal, all angles 90°, equal diagonals, half-turn-symmetry, two axes of symmetry through opposite sides, two long and two short sides, etc.

Van Hiele 3

Correct, economical definitions, eg. a rectangle is a quadrilateral with two axes of symmetry though opposite sides.

As can be seen from the two examples at Van Hiele Levels 1 & 2, pupils' spontaneous definitions would also tend to be *partitional*, in other words, they

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.
would not allow the inclusion of the squares among the rectangles (by explicitly stating two long and two short sides). In contrast, according to the Van Hiele theory, definitions at Level 3 are typically *hierarchical*, which means they allow for the inclusion of the squares among the rectangles, and would not be understood by pupils at lower levels.

The presentation of formal definitions in textbooks is often preceded by an activity whereby pupils have to compare in tabular form various properties of the quadrilaterals, eg. to see that a square, rectangle and rhombus have all the properties of a parallelogram. The purpose clearly is to prepare them for the formal definitions later on which are *hierarchical*. (In other words, the given definitions provide for the inclusion of special cases, eg. a parallelogram is defined so as to include squares, rhombi and rectangles). However, research reported in De Villiers (1994) show that many pupils, even after doing tabular comparisons and other activities, if given the opportunity, still prefer to define quadrilaterals in *partitions*. (In other words, they would for example still prefer to define a parallelogram as a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel, but not all angles or sides equal).

A constructivist approach would not directly present pupils with read-made definitions, but allow them to formulate their own definitions irrespective of whether they are partitional or hierarchical. By then discussing and comparing in class the relative advantages and disadvantages of these two different ways of classifying and defining quadrilaterals (both of which are mathematically correct), pupils may be led to realize that there are certain advantages in accepting a hierarchical classification. For example, if pupils are asked to compare the following two definitions for the parallellograms, they immediately realize that the former is much more **economical** than the latter:

hierarchical: A parallelogram is a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel.

partitional: A parallelogram is a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel, but not all angles or sides equal.

Clearly in general, partitional definitions are longer since they have to include additional properties to ensure the exclusion of special cases. Another advantage of a hierarchical definition for a concept is that all theorems proved for that concept then automatically apply to its special cases. For example, if we prove that the diagonals of a parallelogram bisect each other, we can immediately conclude that it is also true for rectangles, rhombi and squares. If however, we classified and defined them partitionally, we would have to prove separately in each case, for parallelograms, rectangles, rhombi and squares, that their diagonals bisect each other. Clearly this is very uneconomical. It seems clear that unless the role and function of a hierarchical classification is meaningfully

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

discussed in class as described in De Villiers (1994), many pupils will have difficulty in understanding why their intuitive, partitional definitions are not used.

The USEME experiment

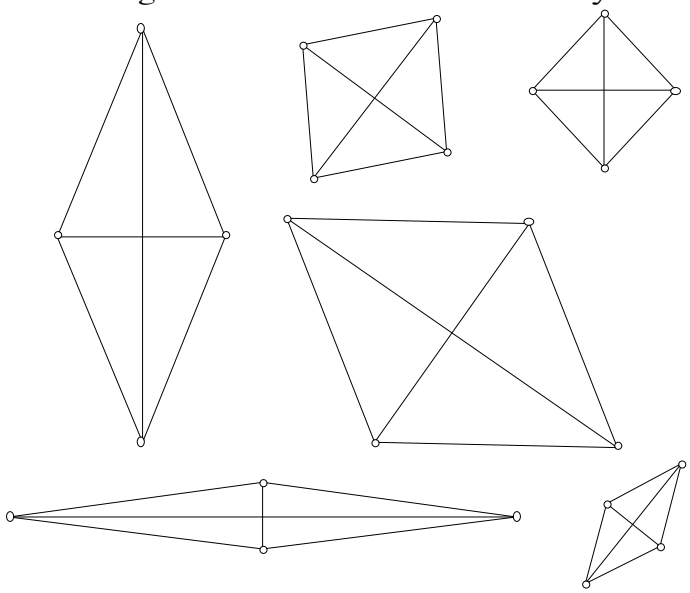
Is it possible to devise teaching stategies for the teaching of the processes of defining and axiomatising at Van Hiele levels 3 and 4? This in fact was the focus of the University of Stellenbosch Experiment with Mathematics Education (USEME) conducted with a control group in 1977 and an experimental group in 1978 (see Human & Nel et al, 1989a). The experiment was aimed at the Grade 10 (Std 8) level and involved 19 schools in the Cape Province. Whereas the traditional approach focusses overridingly on developing the ability of making deductive proofs (especially for riders), the experimental approach was aimed mainly at:

- developing the ability to construct formal, economical definitions for geometrical concepts
- developing understanding of the nature and role of axioms, definitions and proof

The following is an example of one of the first exercises in defining used in the experimental approach (see Human & Nel et al, 1989b:21).

EXERCISE

1(a) Make a list of all the common properties of the figures below. Look at the angles, sides and diagonals and measure if necessary.



(b) What are these types of quadrilaterals called?

(c) How would you explain in words, *without making a sketch*, what these quadrilaterals are to someone not yet acquainted with them?

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

The spontaneous tendency of almost all the pupils in (c) was to make a list of all the properties discovered in (a); thus giving a correct, but uneconomical description (definition) of the rhombi (thus suggesting Level 2 understanding). This led to the next two exercises which was intended to lead them to shorten their descriptions (definitions), for example:

2. A letter is addressed as follows:

   Mr. JH Nel
   "Nelstevrede"
   9 Venter Avenue
   PO Box 48639
   Stellenbosch
   7600

(a) The address is unnecessarily long. Give a shortened version of the above address so that the letter would still arrive at Mr. Nel. (Post in Stellenbosch is delivered in post boxes as well as to street addresses.)

(b) Are there other shortened versions of the above address whereby the letter would still reach Mr. Nel? Give as many shortened versions as you can. Everyone must be as short as possible.

3(a) Construct three different rhombi on your own.

(b) Look again at the verbal description of rhombi you gave in 1(c). Is your description perhaps unnecessarily long? If so, give a shorter description of rhombi which nevertheless would still definitely give you a rhombus if you constructed a figure according to the information contained in your (shorter) description: ensure therefore that it will have all the properties of a rhombus, even if all these properties are not mentioned in (your) shorter description.

(c) Give three different short verbal descriptions of rhombi.

(d) Try to construct a quadrilateral which is not a rhombus, but complies to the conditions of your first (shorter) descriptions in (b). If you can achieve that, your description is not an accurate description of the rhombi! Check your other two shorter descriptions of the rhombi in the same manner.

Clearly here pupils were led to shorten their descriptions (definitions) of rhombi by leaving out some of its properties. For example, in 3(a) pupils found that one does not need to use all the properties to construct a rhombus. One could for example obtain one by constructing all sides equal. In (b) and (c) pupils typically came up with different shorter versions, some of which were *incomplete* (particularly if they're encouraged to make it as short as possible by promising a prize!), for example: "*A rhombus is a quadrilateral with perpendicular diagonals*". This provided opportunity to provide a counter-example and a discussion of the

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

need to contain enough (sufficient) information in one's descriptions (definitions) to ensure that somebody else knows exactly what figure one is talking about.

With some encouragement, pupils came up with several different possibilities. Also note at this stage that they were not expected to **logically** check their definitions, but by accurate **construction** and **measurement** (in other words a typical Level 2 activity). For example, pupils were expected to construct figures as shown in Figure 12 to evaluate definitions like the following:

(1) A rhombus is a quadrilateral with all sides equal.

(2) A rhombus is a quadrilateral with perpendicular, bisecting diagonals.

(3) A rhombus is a quadrilateral with bisecting diagonals.

(4) A rhombus is a quadrilateral with one pair of opposite sides parallel and one pair of adjacent sides equal.

(5) A rhombus is a quadrilateral with perpendicular diagonals and one pair of adjacent sides equal.

(6) A rhombus is a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel and one pair of adjacent sides equal.

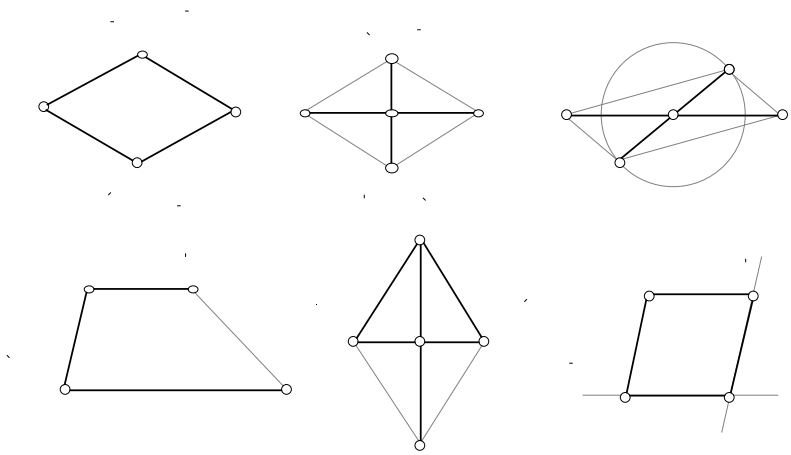


Figure 12: Construction & measurement

Psychologically, constructions like these are extremely important for the transition from Level 2 to Level 3. It helps to develop an understanding of the difference between a *premisse* and *conclusion* and their *causal* relationship; in other words, of the logical structure of an "*if-then*" statement. Logically each of the above statements can be rewritten in this form. For example, the last statement could be rewritten as: "**If** a quadrilateral has both pairs of opposite sides parallel and one pair of adjacent sides equal, **then** it is a rhombus (ie. has all sides equal, perpendicular bisecting diagonals, etc)". Smith (1940) reported marked improvement in pupils' understanding of "*if-then*" statements by letting them make constructions to evaluate geometric statements as follows:

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

"*Pupils saw that when they did certain things in making a figure, certain other things resulted. They learned to feel the difference in category between the relationships they* ***put*** *into a figure - the things over which they had control - and the relationships which* ***resulted*** *without any action on their part. Finally the difference in these two categories was associated with the difference between the* ***given*** *conditions and* ***conclusion****, between the if-part and the then-part of a sentence*."

After some experimental exploration of different alternative definitions for the rhombi as described above, the pupils were then led into a deductive phase where starting from one definition they had to logically check whether all the other properties could be derived from it (as theorems). The same exercises were then repeated for the parallelograms. Eventually, it was explained to pupils that it would be confusing if everyone used different definitions for the rhombi and parallelograms, and it was agreed to henceforth use one definition only for each concept. (Note that the role and function of a hierarchical classification for the quadrilaterals was not adequately addressed at the time of the USEME experiment, and was one of the reasons for the subsequent study reported in De Villiers (1994)).

A common misconception among pupils (and even some of their teachers and textbook authors) is that axioms are *self-evident* truths, instead of necessary starting points for a mathematical system. An important objective of the USEME project was to let pupils understand the **necessity** of definitions and axioms by providing them with the experience that not all propositions within a formal system can be proved without getting a circularity, and that one consequently had to accept certain propositions as starting points (Van Hiele Level 4). Instead of presenting a finished axiomatic system to pupils, they were first engaged in the process of systematization as follows (see Human & Nel et al, 1989b: 43). (Note: Although pupils at this point knew the properties of parallel lines from informal exploration, they had not been given a formal definition for parallel lines nor logically derived any of the properties. They had also earlier been introduced to proof as a means of explanation of several interesting riders).

EXERCISE

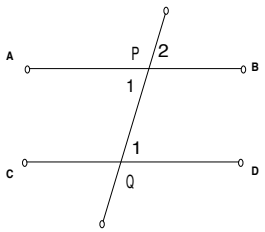
1. Try to prove that if two parallel lines are cut by a transversal, then alternate angles are equal. You may make use of our other assumptions about parallel lines (corresponding angles equal, co-interior angles supplementary), as well as the theorem that when two straight lines intersect, vertically opposite angles are equal.
2. In your proof in no. 1 you made use of certain assumptions. Now try to prove these assumptions too.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

3. Once again, in your proofs in no. 2, you made use of assumptions. Now make an attempt to prove these assumptions as well and to carry on in this way until you have proved all your assumptions.

In attempting to answer questions 1, 2 and 3, pupils inevitably argued circularly. The following is an example:

1.



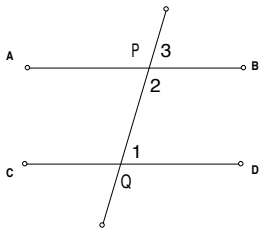
$\angle Q_1 = \angle P_2$ (corresponding angles, $AB//CD$)

$\angle P_1 = \angle P_2$ (directly opposite angles)

$\therefore \angle Q_1 = \angle P_1$

Alternate angles are therefore equal.

2.



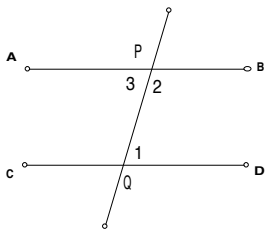
$\angle Q_1 + \angle P_2 = 180°$ (co-interior angles, $AB//CD$)

$\angle P_3 + \angle P_2 = 180°$ (QP extended forms straight line)

$\therefore \angle Q_1 = \angle P_3$

Corresponding angles are therefore equal.

3.



$\angle P_3 + \angle P_2 = 180°$ (APB is straight line)

$\angle P_3 = \angle Q_1$ (alternate angles, $AB//CD$)

$\therefore \angle Q_1 + \angle P_2 = 180°$

The sum of the co-interior angles on the same side of the transversal are therefore 180°.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

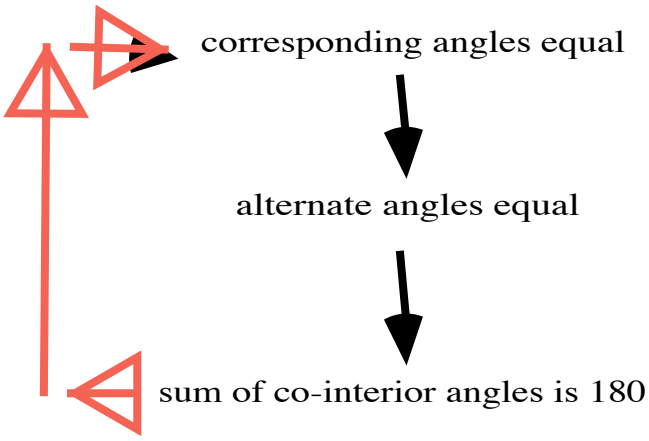


Figure 13: A circular argument

These series of proofs can be schematically represented as shown in Figure 13 and clearly illustrate the underlying *circular* argument. The problem is that no matter how much they try, they inevitably land up with some kind of circularity. Although many pupils did not at first recognize the problem, some subsequent exercises alerted them to the underlying problem and the realization that it is impossible to prove all mathematical statements or properties of mathematical objects without obtaining a circular argument. They then realized that one had to accept one of these properties as a statement *without proof* (ie. as a definition or axiom) to avoid a circularity.

Comparative research at the conclusion of the USEME experiment indicated that not only had the experimental groups gained substantially in their ability to define known and unknown geometric objects (economically correct), but that they had developed a deeper understanding of the nature of axioms, as well as an ability to recognize circular and other invalid arguments (see Human, Nel et al, 1989a).

Dynamic Geometry Software

The development of dynamic geometry software in recent years is certainly the most exciting development in geometry since Euclid. Besides rekindling interest in some basic research in geometry, it has revitalized the teaching of geometry in many countries where Euclidean geometry was in danger of being thrown into the trashcan of history. For example, someone recently made the claim at the International Congress on Mathematical Education (ICME) in Spain (July 1996) that dynamic geometry had saved the geometry curriculum in the United States.

As we have seen earlier, one of the main reasons for the poor performance of pupils in geometry can be found in terms of the Van Hiele theory. For example, many pupils have undeveloped visualisation skills which are an important

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

prerequisite for success in geometry. Furthermore, pupils are introduced too early to formal geometry without allowing sufficient experimental exploration of the properties of figures and the gradual introduction of appropriate formal terminology.

In the past, many teachers have simply avoided the informal exploration of geometric relationships by construction and measurement with paper-and-pencil, since they are so time-consuming (and relatively inaccurate). (Of course, there are also those teachers who from an extreme formalist philosohical position, disregard any form of experimental work in mathematics). Another problem is that such constructed figures are "*static*", one either has to redraw the figure or be able to visualise how it might chance shape.

This however has now all changed with the development of sophisticated software packages for geometry. One of the first such "*state of the art*" packages to be produced was Cabri-Geometre, a French program that was first introduced to the international Mathematics Education community at a conference in Budapest in 1988. Since then other similar packages have been developed, for example, Geometer's Sketchpad by an American company and with assistance from the National Science Foundation and the Visual Geometry Project at Swarthmore College, USA.

These geometric software packages were designed with the specific intention of putting at the disposal of the pupil or student a micro-world type environment for the experimental exploration of elementary plane geometry. In the past one either had to draw the geometric configurations on a sheet of paper, thereby obtaining a more or less exact, but fixed representation, thus severely limiting exploration. In these software packages the geometric figures can be constructed through actions and in a language which are very close to those in use in the familiar "*paper-and-pencil*" universe. In contrast to paper-and-pencil construction, dynamic geometry is accurate and is it extremely quick and easy to carry out complex constructions, and to vary them afterwards.

Once created, these figures can be redrawn by "*grasping*" their basic elements directly on the screen and moving them, while keeping the properties which had been explicitly given to them. In this way one can "*continuously*" change a triangle, and for instance notice that its altitudes always stay concurrent during the transformation. The software therefore allows one to easily repeat experiments in many different orientations and thereby checking which geometric properties stay invariant. In fact, Cabri has a property checking facility (only Macintosh version) that can check whether certain properties (eg. parallelism, concurrency, collinearity, orthogonality, etc) are true in general, and if they're not, it can construct counter-examples.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

Probably the most welcome facility of dynamic geometry is its potential to encourage (re-introduce) experimentation and the kind of pupil oriented "*research*" in geometry described by Luthuli (1996) and others. In such a research-type approach, students are inducted early into the art of problem posing and allowed sufficient opportunity for exploration, conjecturing, refuting, reformulating and explaining as outlined in Figure 14 (compare Chazan, 1990). Dynamic geometry software strongly encourages this kind of thinking as they are not only powerful means of verifying true conjectures, but also extremely valuable in constructing counter-examples for false conjectures.

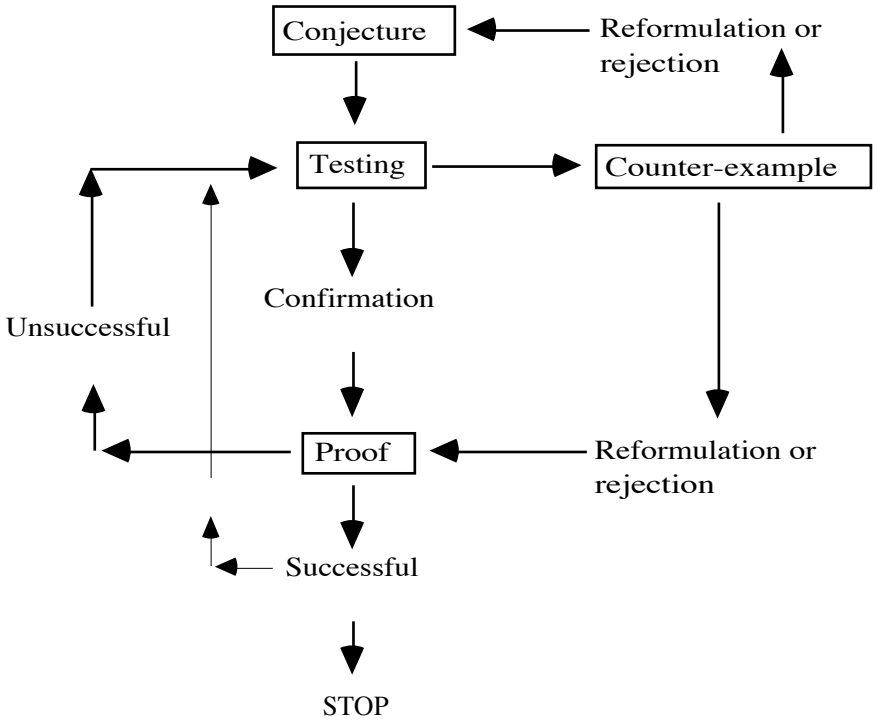


Figure 14: Pupil research in geometry

However, the development of dynamic geometry has also necessitated a radical change to the teaching of proof. Traditionally, the typical approach to geometry has always been to try and create doubts in the minds of pupils about the validity of their empirical observations, and thereby attempting to motivate a need for deductive proof. From experience, these strategies of attempting to raise doubts in order to create a need for proof are simply not successful when geometric conjectures have been thoroughly investigated through their continuous variation with dynamic software like *Cabri* or*Sketchpad*. When pupils are able to produce numerous corresponding configurations easily and rapidly, they then simply have no (or very little) need for further conviction/verification.

Although pupils may exhibit no further need for conviction in such situations, the author has found it relatively easy to solicit further curiosity by asking them **why** they think a particular result is true; i.e. to challenge them to

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

try and *explain* it (also see De Villiers, 1990; 1991; Schumann & De Villiers, 1993). Pupils quickly admit that inductive verification merely confirms; it gives no satisfactory sense of *illumination*; i.e. an insight or understanding into how it is a consequence of other familiar results. Pupils therefore find it quite satisfactory to then view a deductive argument as an attempt at explanation, rather than verification.

Particularly effective appears to be to present pupils early on with results where the provision of explanations (proofs) enable surprising further generalizations (using proof as a means of discovery). Rather than one-sidedly focussing only on proof as a means of verification in geometry, it therefore appears that other functions of proof such as explanation and discovery should be effectively utilized to introduce proof as a meaningful activity to pupils.

The following is an example of a possible worksheet in this regard from De Villiers (1995a):

WORKSHEET

(a) Construct a *dynamic* kite using the properties of kites explored and discussed in our previous lessons.

(b) Check to ensure that you have a dynamic kite, i.e. does it always remain a kite no matter how you transform the figure? Compare your construction(s) with those of your neighbours - is it the same or different?

(c) Next construct the midpoints of the sides and connect the midpoints of adjacent sides to form an inscribed quadrilateral.

(d) What do you notice about the inscribed quadrilateral formed in this way? (Make some measurements to check your observation).

(e) State your conjecture.

(f) Grab any vertex of your kite and drag it to a new position. Does it confirm your conjecture? If not, can you modify your conjecture?

(g) Repeat the previous step a number of times.

(h) Is your conjecture also true when your kite is *concave*?

(i) Use the property checker of *Cabri* to check whether your conjecture is true in general.

(j) State your final conclusion. Compare with your neighbours - is it the same or different?

(k) Can you explain **why** it is true? (Try to explain it in terms of other well-known geometric results. *Hint*: construct the diagonals of your kite. What do you notice?)

(l) Compare your explanation(s) with those of your neighbours. Do you agree or disagree with their explanations? Why? Which explanations are the most satisfactory? Why?

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

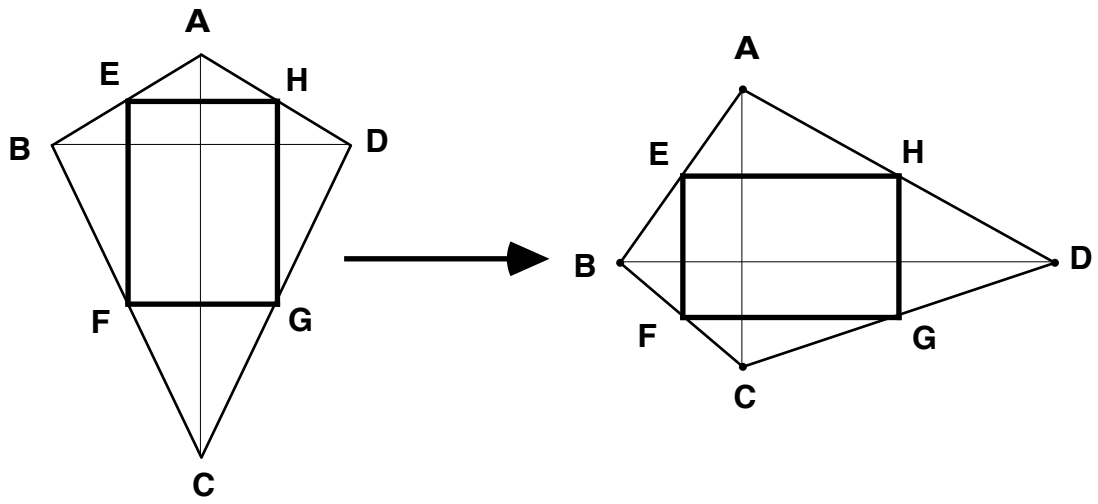


Figure 15: Explanation & discovery

Formulation

The line segments consecutively connecting the midpoints of the adjacent sides of a kite form a rectangle.

Deductive explanation

A deductive analysis shows that the inscribed quadrilateral is always a rectangle, because of the *perpendicularity* of the diagonals of a kite. For example, according to an earlier discussed property of triangles, we have EF//AC in triangle ABC and HG//AC in triangle ADC (see Figure 15a). Therefore EF//HG. Similarly, EH//BD//FG and therefore EFGH is a parallelogram. Since BD ⊥ AC (property of kite) we also have for instance EF ⊥ EH, but this implies that EFGH is a rectangle (a parallelogram with a right angle is a rectangle).

Looking back

Notice that the property of equal adjacent sides (or an axis of symmetry through one pair of opposite angles) was not used at all. In other words, we can immediately **generalize** the result to a *perpendicular quad* as shown in Figure 15b. (Note that it is also true for concave and crossed cases). This shows the value of understanding **why** something is true. Furthermore, note that the general result was not suggested by the purely empirical verification of the original conjecture. Even a systematic empirical investigation of various types of quadrilaterals would probably not have helped to discover the general case, since most people would probably have restricted their investigation to the more familiar quadrilaterals such as parallelograms, rectangles, rhombi, squares and rectangles. (Note that from the above explanation we can also immediately see that EFGH will always be a parallelogram in *any* quadrilateral. Check on *Cabri* or *Sketchpad* if you like!).

The teacher's language is particularly crucial in this introductory phase to proof. Instead of saying the usual: "*We cannot be sure that this result is true for all*

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

possible variations, and we therefore have to (deductively) prove it to make absolutely sure", pupils (and students) find it much more meaningful if the teacher says: "*We now know this result to be true from our extensive experimental investigation. Let us however now see if we can EXPLAIN WHY it is true in terms of other well-known geometric results . In other words, how it is a logical consequence of these other results*."

It is usually necessary to discuss in some detail what is meant by an "*explanation*". For example, the regular observation that the sun rises every morning clearly does not constitute an explanation; it only reconfirms the validity of the observation. To explain something, one therefore has to explain it in terms of something else, e.g. the rotation of the earth around the polar axis. Similarly, the regular observation that say the sum of the angles of a triangle is 180° does not constitute any explanation; in order to explain it, we need to show how (why) it is a logical consequence of some other results that we know.

Of course, proof has many other functions, e.g. verification, systematization, communication, discovery, intellectual challenge, etc. which also have to be communicated to pupils to make proof a meaningful activity for them. In fact, it seems meaningful to use a **spiral** approach as in De Villiers (1999) to introduce the various functions of proof more or less as given in Figure 16. It is important not to delay the first introduction to proof as a means of explanation unduly, as pupils might become accustomed to seeing geometry as just an accumulation of empirically discovered facts, and in which explanation plays no role. For example, even pupils at Van Hiele Level 1 could easily use symmetry to explain why certain results are true (e.g. why base angles of isosceles triangle are equal). Although the other functions can be introduced gradually as pupils progress through the levels from Level 1 to 3, the function of systematization should however be delayed until pupils have reached at least Van Hiele Level 3 or 4. (Examples of activities aimed at some different functions are given in De Villiers (1995b)). The function of communication is of course present all the time as the teacher needs to continuously negotiate with pupils the criteria for what constitutes an explanation, proof, etc.

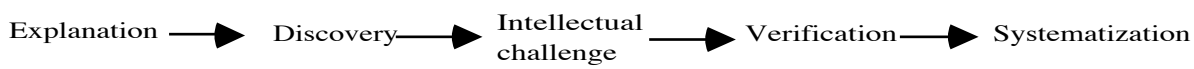


Figure 16: Teaching functions of proof

The dynamic nature of geometric figures constructed in *Sketchpad* or *Cabri* may also make the acceptance of a hierachical classification of the quadrilaterals far less problematic than it is at the moment. For example, if pupils construct a

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.
quadrilateral with opposite sides parallel, then they will notice that they could easily drag it into the shape of a rectangle, rhombus or square as shown in Figure 17. In fact, it seems quite possible that pupils would be able to accept and understand this even at Van Hiele Level 1 (Visualization), but further research into this particular area is needed.

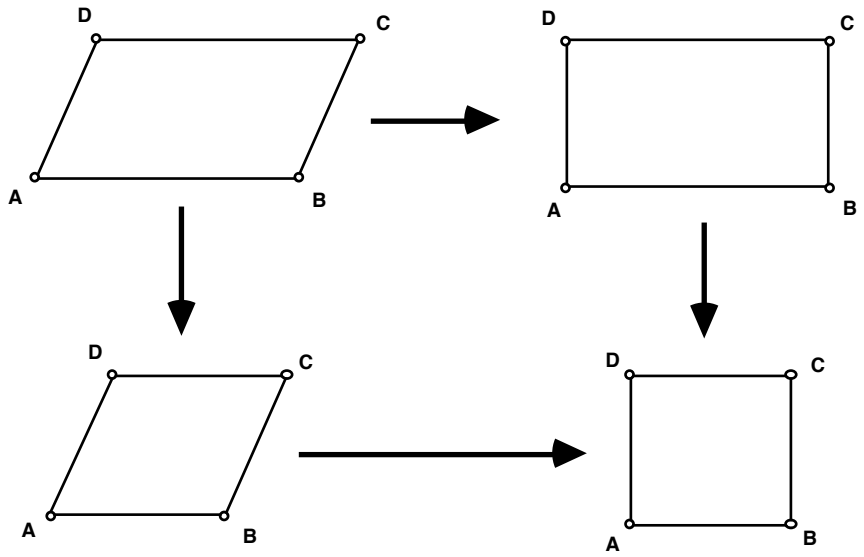


Figure 17: Dynamic transformation of parallelogram

The ability to quickly and efficiently transform geometric configurations with dynamic geometry software also allows one to effectively **model** real world situations and problems by dynamic scale drawings. It therefore becomes possible to give much more complicated real world problems to pupils to solve than is currently the case. Some examples are given in De Villiers (1994b). These software programs also have facilities for tracing the loci of certain objects, eg. points. This facility could easily be used, not only in many real world contexts, but also makes it feasible to introduce and study the conics as loci (in the classical Greek way - see Scher, 1995) instead of treating it purely algebraically as in the present syllabus.

As described in the previous section, construction and measurement is extremely important from a learning psychological point of view (ie. in developing an understanding of the "*if-then*" nature of propositions and the inter-relationship between properties, and therefore in the transition from Van Hiele Level 2 to 3). Traditionally, many teachers have simply avoided paper-and-pencil constructions because it is tedious and rather inaccurate. The availibility of dynamic geometry however changes all of that since it is quick, efficient and accurate. With dynamic geometry, one does not have to redraw for example several different triangles, repeating the same constructions and checking each

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

case individually, as the dragging facility of dynamic geometry allows one to continuously transform one triangle into another, but still maintaining the initial constructions one carried out on it.

It should also be pointed out that certain kinds of construction activities (on Sketchpad or otherwise) are completely inappropriate at Van Hiele Level 1. For example, at a recent PME conference someone commented that she was unpleasantly dismayed at how difficult young children found the task of constructing a "dynamic" square with Sketchpad. However, if the children were still at Van Hiele Level 1, then it is not surprising at all - how can they construct it if they do not yet know its properties (Level 2) and that some properties are sufficient and others not (i.e. the relationships between the properties - Level 3)?

In fact, at Van Hiele Level 1 it would appear to be far more appropriate to provide children with ready-made sketches of quadrilaterals which they can easily manipulate and first investigate visually. Next they could start using the measure features of the software to analyse the properties to enable them to reach Level 2. Only then would it be appropriate to ask them how they would construct such dynamic figures themselves, thus assisting the transition to Level 3.

Concluding comments

So what are some of the crucial changes necessary in secondary school geometry as we approach the year 2000? Basically the changes can be summed up as changes in content, process and teacher education. In terms of content there is a need to contemporize by including possible content such as fractals, graph theory, transformations, non-Euclidean geometry, etc. at various grades and at various levels of formality. In particular, the study of transformations could form a valuable golden thread through the entire curriculum, and in the high school show the powerful integration of algebra and geometry (see De Villiers, 1993).

However, even before any changes in the high school, many changes are necessary to our primary school geometry curriculum. Apart from content such as tessellations, vision- and 3D-geometry as described by Van Niekerk (1995, 1996) and Witterholt & Heinneman (1995) is absolutely essential for developing visualisation and spatial orientation skills, not only for formal geometry later on, but also for further study in woodwork, metalwork, architecture, art, computer graphics, engineering design, etc. More use could also be made of accurate scale drawings to solve complicated real world problems, and to develop an intuitive understanding of the process of modelling. These changes also have to be contextualised meaningfully in different contexts geographically, culturally, linguistically, etc.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

However, perhaps even more important than changes in geometrical content, we need to focus far more on teaching and developing the process aspects of mathematics. It needs to be acknowledged that geometry content should not be presented in a ready-made form to pupils, but that they should actively (re)construct it in the class. In order to realize such a radical change in objectives, it is also necessary to change our evaluation procedures. Joubert (1980) and De Vries (1980) have for example developed several examples of how one could evaluate pupils' abilities to conjecture, define, axiomatize, classify, read critically, refute, etc. (For example see Joubert, 1988 & 1989).

Lastly, it is important to point out that none of the above would be realizable unless radical changes are made to teacher education programs around the country; both in pre-service and in-service. In particular, most high school teachers, even those with good qualifications, know hardly any more geometry than the pupils they have to teach. The reason is simple: most tertiary institutions (with the exception of UPE) do not teach any further geometry in their undergraduate courses. It is therefore important to seriously consider the (re)introduction of geometry in tertiary courses for secondary teachers, not only Euclidean, but different kinds of geometry (compare with Baart, 1992). However, the geometry education of primary school teachers also needs urgent attention. Burger (1992) for example has proposed an interesting geometry curriculum for primary mathematics teachers based on the Van Hiele model that could provide the basis for the development of a new college geometry curriculum.

References

Baart, L. (1992). Measuring the earth. **Pythagoras**, 28, April, 39-42.

Benade, G.(1995). Teelings van die vlak. **Pythagoras**, 37, Aug, 33-38.

Burger, W.F. (1992). A geometry curriculum for prospective elementary teachers based on the Van Hiele model of development. **Pythagoras**, 29, Aug, 9-17.

Chazan, D. (1990). Quasi-empirical views of mathematics and mathematics teaching. In Hanna, G. & Winchester, I. (Eds). **Creativity, thought and mathematical proof**. Toronto: OISE.

Davies, P.J. (1995). The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry. **American Mathematical Monthly**, 102(3), 204-214.

De Villiers, M.D. (1990). The role and function of proof in mathematics. **Pythagoras**, 24, 17-24.

De Villiers, M.D. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. **Pythagoras**, 26, 18-27.

De Villiers, M.D. & Njisane, R.M. (1987). The development of geometric thinking among black high school pupils in KwaZulu. **Proceedings of the 11th PME conference**, Montreal, Vol 3, 117-123.

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

De Villiers, M.D. (1993). Transformations: A golden thread in school mathematics. **Spectrum**, 31(4), Oct, 11-18.

De Villiers, M.D. (1994a). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. **For the Learning of Mathematics**, 14(1), 11-18.

De Villiers, M.D. (1994b). The role of technology in mathematical modelling. **Pythagoras**, 35, Dec, 34-42.

De Villiers, M.D. (1995a). An alternative introduction to proof in dynamic geometry. **MicroMath**, Spring, 14-19.

De Villiers, M.D. (1995b). Why proof in dynamic geometry? **Proceedings of Justifying and Proving in School Mathematics Conference**, University of London, 6-8 Dec 1995, 155-173.

De Villiers, M.D. (1996). **Some Adventures in Euclidean geometry**. Durban: University of Durban-Westville.

De Villiers, M.D. (1997). The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections. J. King & D. Schattschneider (eds). (1997). **Geometry Turned On**, Mathematical Association of America, 15-24.

De Villiers, M.D. (1999). **Rethinking Proof with Sketchpad**. Key Curriculum Press, USA.

De Vries, J.A. (1980). 'n Teoretiese en empiriese studie oor die onderrig van vierhoeke in standerd sewe. Ongepubliseerde M.Ed. verhandeling, Universiteit Stellenbosch.

Freudenthal, H. (1973). **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). **The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents**. Monograph No. 3, NCTM.

Govender, M. (1995). Pupils' proof-writing achievement in circle geometry. Unpublished B.Ed. dissertation, University of Durban-Westville.

Griffiths, H.B. & Howson, A.G. (1974). **Mathematics: Society and Curricula**. Cambridge University Press.

Grunbaum, B. & Shepherd, G.C. (1986). **Tilings and patterns**. New York: Freeman & Co.

Human, P.G. & Nel, J.H. In medewerking met MD de Villiers, TP Dreyer & SFG Wessels. (1989a). **Alternatiewe aanbiedingstrategiee vir meetkunde-onderwys: n Teoretiese en empiriese studie.** ENWOUS verslag no. 2, Universiteit Stellenbosch. (Only in Afrikaans).

Human, P.G. & Nel, J.H. In co-operation with MD de Villiers, TP Dreyer & SFG Wessels. (1989b). **Appendix A: Curriculum Material**. RUMEUS Curriculum Material Series No. 11, University of Stellenbosch. (Ook in Afrikaans).

Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.

Joubert, G. J. (1980). Enkele vernuwingsmoontlikhhede in die evaluering van meetkunde in die Senior Sekondere Skoolfase. Ongepubliseerde M.Ed. verhandeling, Universiteit Stellenbosch.

Joubert, G.J. (1988). Evaluering van meetkunde. **Pythagoras**, 18, Nov, 7-13.

Joubert, G.J. (1989). Evaluering van meetkunde, No. 2. **Pythagoras**, 19, April, 13-15.

Kelly, P.J. (1966). Von Aubel's quadrilateral theorem. **Mathematics Magazine**, 49, 35-37.

Luthuli, D. (1996). Questions, reflection and problem posing as sources of inquiry in Euclidean geometry. **Pythagoras**, 40, Aug, 17-27.

Malkevitch, J. (Ed). (1990). **Geometry's future**. Arlington: COMAP.

Nohda, N. (1992). Geometry teaching in Japanese school mathematics. **Pythagoras**, 28, April, 18-25.

Oldknow, A. (1995). Computer adied research into triangle geometry. **The Mathematical Gazette**, 79(485), 263-274.

Oldknow, A. (1996). The Euler-Gergonne-Soddy triangle of a triangle. **The American Mathematical Monthly**, 103(4), 319-329.

Schattschneider, D. (1981). In praise of amateurs. In D. Klarner. **The mathematical Gardner**. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Scher, D. (1995). **Exploring Conic Sections with the Geometer's Sketchpad**. Key Curriculum Press.

Schumann, H. & De Villiers, M.D. (1993). Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving. **Pythagoras**, 31, 9-20.

Smith, R. R. (1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. **The Mathematics Teacher**, 33, 99-134, 150-178.

The Mathematical Association of South Africa. (1978). **South African Mathematics Project: Syllabus Proposals**. Pretoria: MASA. (Now Centrahil: AMESA).

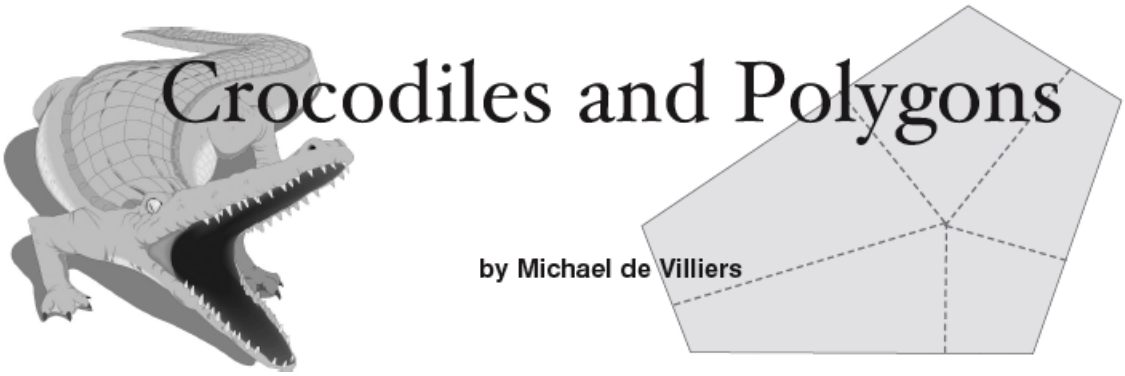
Van Niekerk, R. (1995). From spatial orientation to spatial insight: A geometry curriculum for the primary school. **Pythagoras**, 36, 7-12.

Van Niekerk, R. (1996). "4-Kubers" in Africa. **Pythagoras**, 40, Aug, 28-33.

Witterholt, M. & Heinneman, H. (1995). Ruimtelike insig onder die loep. **Pythagoras**, 37, Aug, 20-24.

Yaglom, I.M. (1962). **Geometric Transformations I**. Washington: Mathematical Association of America.

Published in *Mathematics in School*, March 2005, pp. 2-4.



Introduction

One of the constant challenges facing us as mathematics educators is to keep coming up with problems that genuinely surprise and intrigue our students (or better still and ideally, to stimulate our students to come up with variations themselves!). Such problems should provoke a need for explanation and be rich enough for further investigation to encourage students to branch off into different directions. It often helps to give some of these problems a "*real world*" flavour even though they aren't genuine applied mathematical problems. Further spice could be added in the form of a modest sprinkling with a touch of humour.

One possible example that I've found very useful in stimulating surprise among children as well as practising and prospective teachers is Viviani's theorem, which states that the sum of the distances from a point to the sides of an equilateral triangle is constant. In my *Rethinking Proof with Sketchpad* book (De Villiers, 2003), this problem is placed in a pseudo-real world context of a surfer stranded on an island in the shape of an equilateral triangle. The surfer wants to build a hut where the sum of the distances to the sides is a minimum as she surfs on each of the three beaches an equal amount of time.

By using dynamic geometry, students are inevitably very surprised by the unanticipated result that while the three distances change as they drag the point around, the sum nevertheless remains constant! So it wouldn't matter where the surfer builds her hut! Even though 14-year olds show little desire for further conviction having checked it themselves by dragging as reported in Mudaly & De Villiers (2000), their curiosity is usually sufficiently aroused to engage them meaningfully in a guided logical explanation.

Since the result is logically explained from the *equality of the sides*, it follows immediately that the basic argument is generalizable to any *equi-sided* polygon. Even

Published in *Mathematics in School*, March 2005, pp. 2-4. All rights reserved
by The Mathematical Association, http://www.m-a.org.uk

though considering a point outside an equilateral triangle (or any equi-sided polygon) is not sensible given the practical context of an island and the building of a hut, students are also asked to investigate what happens when the point falls outside. Investigation with *Sketchpad* or *Cabri* does not show a constant sum while the point is being dragged outside. It therefore comes as a further surprise and useful learning experience that the sum actually remains constant if we introduce the concept of "*directed distances*", allowing distances to become negative if they fall completely outside the polygon (see De Villiers, 2003, p. 149).

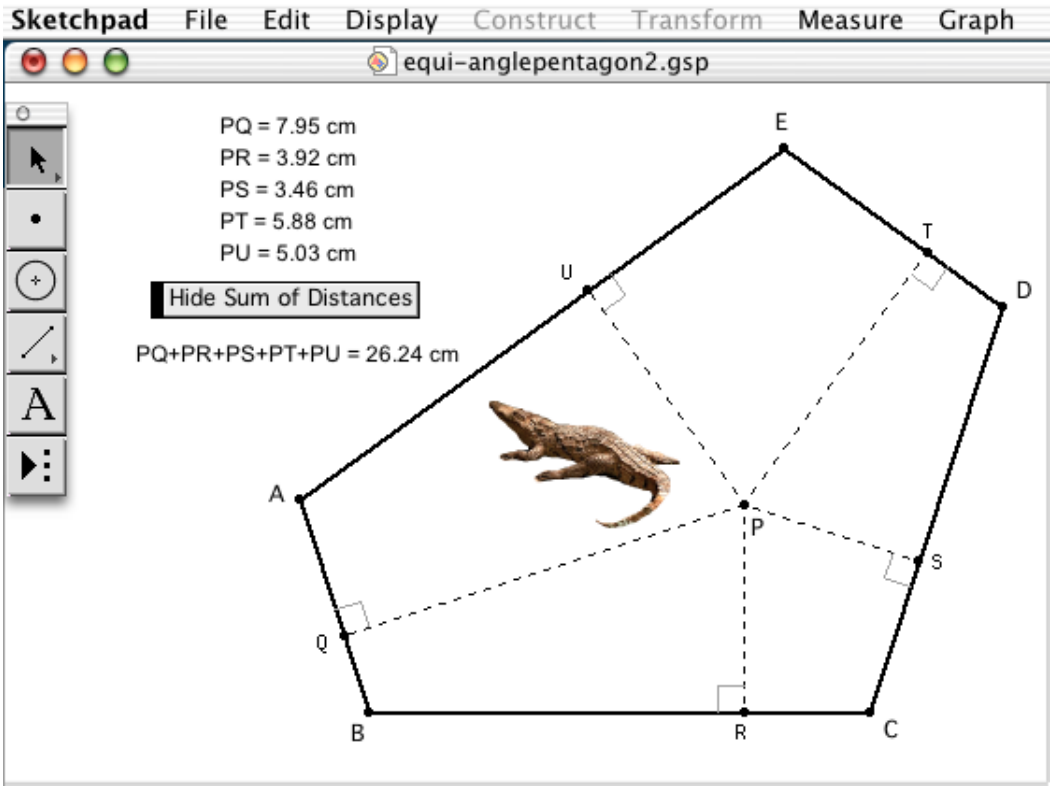


Figure 1

The Crocodile Problem

But the richness of the Viviani's theorem is hardly exhausted! Students can further explore (and explain) what happens when the triangle is not equilateral, as well why it works for a parallelogram which does not have equal sides (and then to consider its generalization to all (even-sided) polygons with opposite sides parallel). Another interesting generalization that students can explore with dynamic geometry is the following problem that students may find amusing:

> "*A mathematical crocodile (whatever that is!) in the Okavango delta lives in a swampy region in the shape of an equi-angled pentagon (see Figure 1). Since the crocodile captures prey an equal amount of times on each of the five banks, it (nicely non-gendered, not so?) wants to hide its captured prey where the sum of the five distances to the banks is a minimum. Where is this optimal point?*"

Published in *Mathematics in School*, March 2005, pp. 2-4. All rights reserved
by The Mathematical Association, http://www.m-a.org.uk

The reader is invited to perhaps first pause and explore the problem for a short while with a zipped Sketchpad sketch that can be downloaded directly from:
http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/crocodile.zip

Since the sides are not equal nor are there any opposite parallel sides, students do not at first expect that the sum of distances would still be constant, and are again surprised when it does not matter how they drag the point P. But why is it still true? How can we logically explain this result?

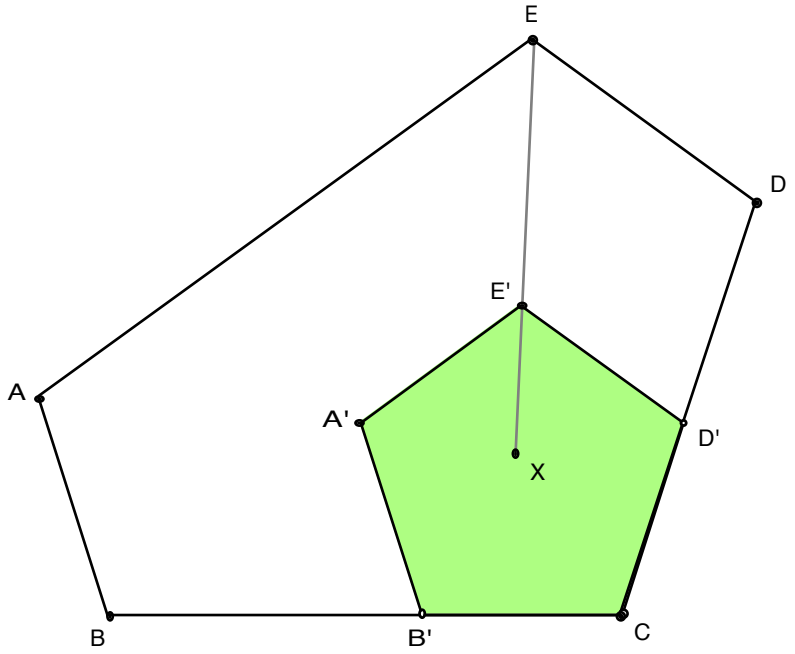


Figure 2

Logical Explanation (Proof)

Firstly note that since all the angles of $ABCDE$ are equal, each of its angles have to be the same as that of a regular pentagon, namely, 108°. By placing a regular pentagon in relation to an equi-angled pentagon as shown in Figure 2, it follows that since $\angle ABC = \angle A'B'C$ that $AB \parallel A'B'$. In the same way, $DE \parallel D'E'$, and therefore $\angle DEX = \angle D'E'X$ (where X lies on EE' extended). However, $\angle DEC = \angle D'E'C'$; thus $\angle AEX = \angle A'E'X$ which means $AE \parallel A'E'$. It follows that a regular pentagon $A'B'C'D'E'$ can always be placed inside an equi-angled $ABCDE$ so that their corresponding sides are parallel as shown in Figure 3.

Published in *Mathematics in School*, March 2005, pp. 2-4.

Since the sum of distances to the sides of any regular polygon is constant (as all sides are equal), it follows that $\sum_{i=1}^{5} x_i$ is constant. However, the distances y_i between the corresponding parallel sides of the two pentagons are always constant, thus $\sum_{i=1}^{5} y_i$ is also constant. But the sum of these two constants must also be constant, and therefore completes the logical explanation and proof.

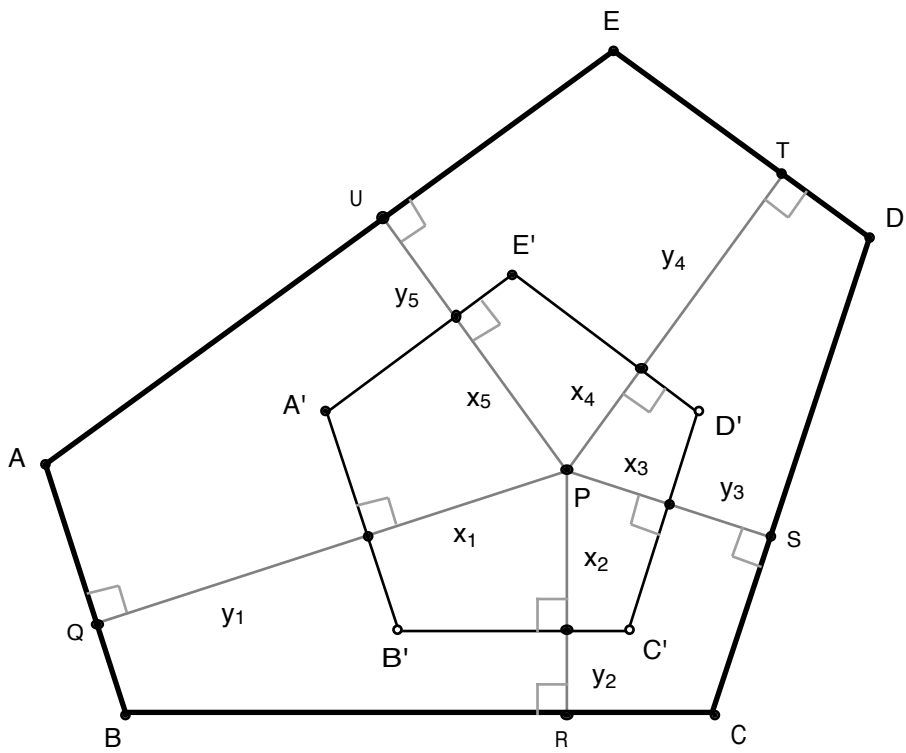


Figure 3

Note that directed distances are assumed above to cover cases when *P*, for example, lies outside *A'B'C'D'E'*. It is furthermore obvious from the proof that the result generalizes in exactly the same way to any *equi-angled* polygon.

Some Further Possibilities

One possibility is to ask students to think about a possible 3D analogue of the equilateral triangle version of Viviani's theorem. With a little prompting it usually doesn't take them long to realise that the result can be generalized to a tetrahedron with faces of equal area. The obvious next question is: for which types of polyhedra would this hold, and whether it can be generalized to even higher dimensions?

Students may also be interested to investigate whether Viviani's theorem also respectively holds in hyperbolic and elliptic geometry. For such an exploration the dynamic geometry software *Cinderella* is ideally suited (see Figure 4). Visit the website http://www.cinderella.de for more information and to download a demo.

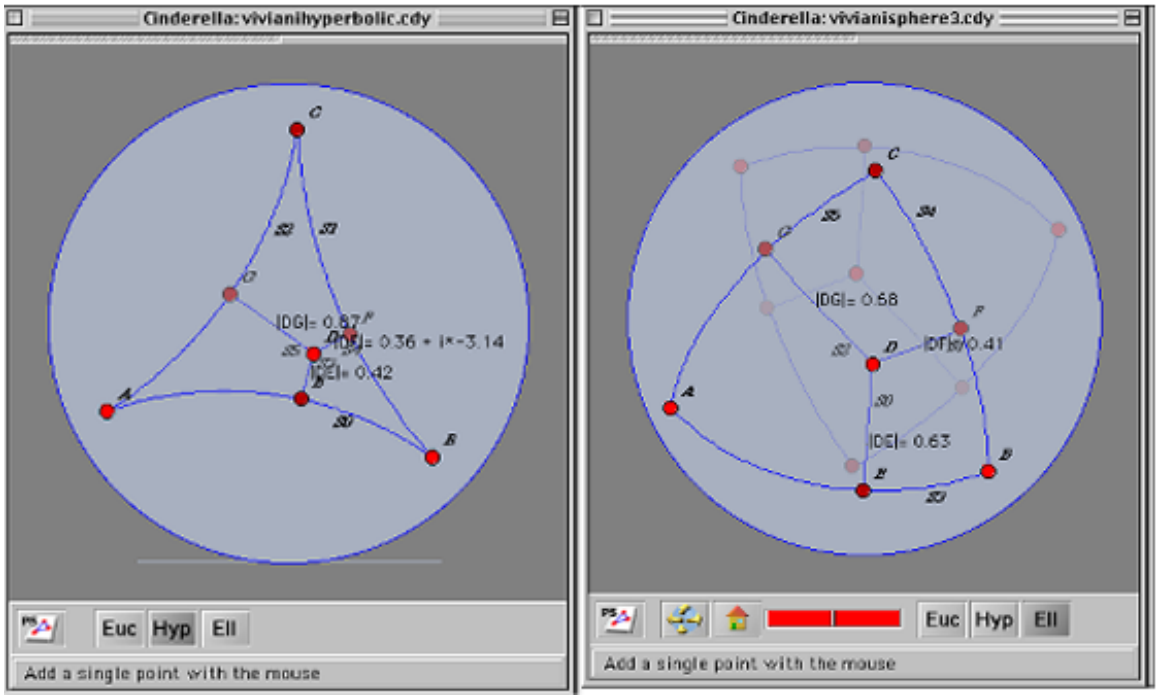


Figure 4

Acknowledgement

I am thankful to John Silvester from the Department of Mathematics, King's College, London, for kindly steering me in the direction of the simple proof and explanation given above.

References

De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville: USA. (A sample of zipped *Sketchpad* sketches from a few activities from the book can be directly downloaded from: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/rethink2.zip)

Mudaly, V. & De Villiers, M. (2000). Learners' Needs for conviction and Explanation within the Context of Dynamic Geometry. *Pythagoras*, August, No. 52, pp. 20-23. (A PDF copy of this article can be downloaded directly from: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf)

Published in *Mathematics in School*, March 2005, pp. 2-4.

Keywords: Dynamic geometry, logical explanation, proof, Viviani, generalization.

Author: Michael de Villiers, Mathematics Education, University of KwaZulu-Natal, Ashwood 3605, South Africa. E-mail: profmd@mweb.co.za; Homepage: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html

Page 1 of 8 Original Research

An illustration of the explanatory and discovery functions of proof

Author:
Michael de Villiers[1]

Affiliation:
[1]Mathematics Education, University of KwaZulu-Natal, Edgewood Campus, South Africa

Correspondence to:
Michael de Villiers

Email:
profmd@mweb.co.za

Postal address:
Private Bag X03, Ashwood 3605, South Africa

Dates:
Received: 15 Aug. 2012
Accepted: 27 Sept. 2012
Published: 30 Nov. 2012

How to cite this article:
De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33*(3), Art. #193, 8 pages. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i3.193

Note:
This article is based on a presentation at the 12th International Congress on Mathematical Education, July 2012, COEX, Seoul, Korea. Workshops on Clough's conjecture have also been conducted at the NCTM Annual Meeting, April 2004, Philadelphia, USA, as well as at the AMESA Congress, July 2004, North-West University, Potchefstroom, South Africa (De Villiers, 2004).

This article provides an illustration of the explanatory and discovery functions of proof with an original geometric conjecture made by a Grade 11 student. After logically explaining (proving) the result geometrically and algebraically, the result is generalised to other polygons by further reflection on the proof(s). Different proofs are given, each giving different insights that lead to further generalisations. The underlying heuristic reasoning is carefully described in order to provide an exemplar for designing learning trajectories to engage students with these functions of proof.

Introduction

It seems that the human brain is designed, or has evolved over time, not only to recognise patterns, but also often to impose them on things we observe. Moreover, from a very young age, children naturally exhibit a need for an explanation of these patterns – a deep-seated curiosity about how or why things work the way they do. They ask questions about why the sky is blue, the sun rises in the East, or why more moss grows on the southern side of a tree (in the Southern Hemisphere).

However, it sadly seems that once young children have entered the domain of mathematics in formal schooling, this natural inquisitiveness and quest for deeper understanding becomes severely repressed. Largely to blame is probably the traditional approach of focusing primarily on the teaching, learning and practising of standard algorithms. These are still presented in many classrooms as mystical chants to be memorised, rather than focusing on understanding why they work, as well as on the meaning of the basic operations underlying them. Lockhart (2002) laments this sorry state of affairs:

> By concentrating on *what*, and leaving out *why*, mathematics is reduced to an empty shell. The art is not in the 'truth' but in the explanation, the argument. It is the argument itself which gives the truth its context, and determines what is really being said and meant. *Mathematics is the art of explanation*. If you deny students the opportunity to engage in this activity — to pose their own problems, make their own conjectures and discoveries, to be wrong, to be creatively frustrated, to have an inspiration, and to cobble together their own explanations and proofs - you deny them mathematics itself. (p. 5, [*emphasis in the original*])

Extending the role of proof beyond verification

Traditionally, the verification (justification or conviction) of the validity of conjectures has been seen as virtually the only function or purpose of proof. Most mathematics teachers probably see this as the main role of proof (Knuth, 2002) and this view, to the exclusion of a broader perspective, also still dominates much of curriculum design in the form of textbooks, lessons and material on teaching proof (French & Stripp, 2005). Even the majority of research conducted in the area of proof has been done from this perspective (Balacheff, 1988; Ball & Bass, 2003; Harel & Sowder, 2007; Stylianides & Ball, 2008). Harel and Sowder, for example, defines a 'proof scheme' as an argument that 'eliminates doubt', effectively restricting the role of reasoning and proof to only that of verification, although they acknowledge the explanatory role of proof in other places.

In the past few decades, however, this narrow view of proof has been criticised by several authors (e.g. Bell, 1976; De Villiers, 1990, 1998; Hanna, 2000; Thurston, 1994; Rav, 1999; Reid, 2002, 2011). They have suggested that other functions of proof such as explanation, discovery, systematisation, intellectual challenge et cetera, have in some situations been of greater importance to mathematicians and can have important pedagogical value in the mathematics classroom as well. But these distinctions of other roles for proof are perhaps far older. For example, Arnauld and Nicole (1662) appear to be referring to the explanatory (illuminating or enlightening) role of proof by objecting to Euclid because they felt Euclid was 'more concerned with convincing the mind than with enlightenment' (cited by Barbin, 2010, p. 237).

Computing technology and the changing role of proof

Mejía-Ramos (2002, p. 6) argues that the search for deeper understanding is what makes many mathematicians reject 'mechanically-checked formal proofs and computational experiments as mathematical proofs', for example, the famous use of computers by Appel and Haken in 1976 to prove the four-colour conjecture (Appel & Haken, 1977). Especially in the light of modern computing technology, such as dynamic geometry and symbolic algebraic processors, it is often the case that a very high level of conviction is already obtained before mathematicians embark on finding a proof. In fact, it can be argued that this 'a priori' conviction is more often a prerequisite and motivating factor (Polya, 1954, pp. 83–84) for looking for a proof than the mythical view that 'eliminating doubt' is the driving force.

On the other hand, although such computing tools enable us to gain conviction through visualisation or empirical measurement, these generally provide no satisfactory insight into why the conjecture may be true. It merely confirms that it is true, and although considering more and more examples may increase our confidence to a greater extent, it gives no psychologically satisfactory sense of illumination (Bell, 1976) or enlightenment – for that, some form of proof is needed! In this regard, it is significant to note that young Grade 9 children still display a need for some form of further explanation (deeper understanding) of a result, which they had already become fully convinced of after empirical exploration on Sketchpad (Mudaly & De Villiers, 2000). Within the context of algebra, Healy and Hoyles (2000) also found that students preferred arguments that both convinced and explained, strongly suggesting that the need for explanation is perhaps an untapped resource in lesson design and implementation.

Appreciation of the verification (justification) function of proof is most easily developed in fields such as number theory, algebra, calculus, et cetera. In these fields one can give spectacular counter-examples to conjectures with massive empirical support (e.g. as in Stylianides, 2011). However, this is not quite the case with dynamic geometry. The difference is that one can transform geometric figures or graphs continuously (or at least closely) by dragging, as well as explore more deeply by zooming in to great levels of accuracy. With these facilities, one can usually find counter-examples to false conjectures fairly quickly and easily. It is possible to contrive didactical situations such as used in De Villiers (2003, pp. 73, 85) where students are given sketches with measurements preset to one decimal accuracy, therefore deliberately misleading them to make a false conjecture. However, genuinely authentic examples in dynamic geometry that are accessible to high school students are few and far between.

It seems more natural and meaningful that within a dynamic geometry (mathematics) environment, potential use may be made of this cognitive need for explanation and understanding to design and implement alternative learning activities. Such learning activities could introduce novices for the first time to proof, not as a means of verification, but as a means of explanation and illumination (e.g. see De Villiers, 1998, 2003), whilst the other functions of proof could be developed later or in other contexts. Furthermore, by initially referring to a deductive argument as a 'logical explanation' instead of a 'proof, it may help to focus attention on its role as a means of deeper understanding of a dynamically verified result rather than of conviction or verification.

Proof as a means of discovery

Quite often, logically explaining (proving) why a result is true gives one deeper insight into its premises. On further reflection, one may then realise that it can be generalised or applied in other circumstances. Anderson (1996, p. 34) also clearly alludes to this aspect when writing, 'Proof can bring understanding of why methods work and, consequently, of how these methods might be adapted to cope with new or altered circumstances.' Rav (1999, p. 10) also describes this 'productive' role of proof when writing: ' ... logical inferences are definitely productive in extending knowledge by virtue of bringing to light otherwise unsuspected connections.' More recently, Byers (2007, p. 337) has made a similar observation: 'A "good" proof, one that brings out clearly the reason why the result is valid, can often lead to a whole chain of subsequent mathematical exploration and generalization.'

I have called this illuminating aspect of proof that often allows further generalisation, the *discovery* function (De Villiers, 1990), and it appears also to be the first explicit distinction of this function (Reid, 2011). For example, explaining (proving) Viviani's theorem for an equilateral triangle by determining the area of the three triangles it is divided up into, and noticing the 'common factor' of the equal sides of these triangles as bases, may allow one to immediately see that the result generalises to any equilateral polygon, because exactly the same 'common factor' will appear (De Villiers, 2003, p. 26).

Nunokawa (2010, pp. 231–232) similarly claims that 'explanations generate new objects of thought to be explored'. He gives an example of a problem involving two overlapping squares, and how explaining why the overlapping area remains constant as the one square remains fixed and the other is rotated, leads one to generalise to other regular polygons with the same feature. Two other 'discovery via proof' examples are discussed and presented in De Villiers (2007a, 2007b). Of course, for novices and less experienced students such generalisation (or specialisation) from a proof is not likely to be as automatic and immediate as with an experienced mathematician. Therefore, in didactically designing tasks to engage high school students, or even student teachers, with the discovery function of proof, sufficient scaffolding is often needed to provide adequate guidance for both the initial proof as well as for further reflection (Hemmi & Löfwall, 2011; Miyazaki, 2000).

Jones and Herbst (2012, p. 267) reporting on a study on the instructional practices of a sample of expert teachers of geometry at Grade 8 level (pupils aged 13–14) in Shanghai, China, identify two important factors in developing an understanding of the discovery function of proof, namely,

variation of the mathematical problems as well as the questions asked by teachers to guide their students.

It is important to also point out here that with the 'discovery' function of proof is not only meant a discovery made after reflecting on a recently constructed proof. As illustrated in De Villiers (1990, p. 22, 2003, pp. 68–69), it also more broadly refers to situations where new results are discovered in a purely logical way by the application of known theorems or algorithms without resorting to any experimentation, construction or measurement. For example, using the tangents to a circle theorem, it is relatively easy to deduce logically (and proving at the same time) that the two sums of the opposite sides of a quadrilateral circumscribed around a circle are equal (and generalising to circumscribed $2n$-gons).

Another illustrative example is given in De Villiers (1999) involving the generalisation of a problem involving an area relationship between a square and a formed octagon. By dividing the sides into different ratios than the original, it was experimentally found with dynamic geometry that the area ratios remained constant. However, a purely inductive approach whereby the different ratios 0.1666; 0.3333; 0.4500 were looked at for the division of the sides into halves, thirds and quarters respectively, was not very helpful in finding a general formula and ultimately had to be derived logically.

More generally, with the discovery function, it also means that a proof can reveal new, powerful methods of solving problems and creating new theories. Logical reasoning and proof can show that certain problems are unsolvable such as, for example, representing $\sqrt{2}$ as a rational (fraction), squaring the circle or solving a quintic (or higher order) polynomial equation with radicals. Hanna and Barbeau (2010, pp. 90–93) suggest a nice example for classroom use, showing how the problem of finding the quadratic formula naturally leads to an introduction to students of the strategy of completing the square. Grabiner (2012, p. 161) gives historical examples of how the distinction between pointwise and uniform convergence arose from counter-examples to Cauchy's supposed theorem regarding infinite series, and of how Cantor's theory of the infinite came about through trying to specify the structure of the sets of real numbers on which Fourier series converge. Similarly, the discovery (invention) of non-Euclidean geometry came about from attempts to use indirect proof (*reductio ad absurdum*) to prove Euclid's 5th postulate. Grabiner (2012, p. 162) describes this as 'another triumph of human reason and logic over intuition and experience'.

The main purpose of this article is to contribute further to the theoretical aspects of the role of proof by providing a heuristic description of some of my personal experiences of the explanatory and discovery functions of proof with a geometric conjecture made by a Grade 11 student. After logically explaining (proving) the result geometrically and algebraically, the result is generalised to other polygons by further reflection on the proof(s). This conjecture and its generalisations could easily be turned into a set of guided learning activities that elicit 'surprise' amongst students (compare Movshovitz-Hadar, 1988); therefore creating a need for explanation, and provide an authentic mix of experimentation and proof of a possibly original result.

Clough's conjecture

Although it is a rare occurrence, nothing gives greater pleasure to a teacher than when one of their students produces a conjecture of their own. The conjecture need not be entirely original, but the excitement created in the classroom when something goes 'outside' or 'beyond' the textbook gives a much more 'real' sense of genuine mathematical discovery and invention. Usually, students are also far more strongly motivated to want to solve such a problem because they perceive it as their own and not something old and boring from the textbook or the curriculum.

By encouraging students, for example, to continually ask 'what-if' questions on their own until it becomes a regular occurrence, students are likely to more naturally start making more original conjectures of their own, providing an exciting injection to liven up the class. The availability of computing technology places at the disposal of students powerful new tools by which they can now easily make independent discoveries (Arzarello, Bartolini Bussi, Leung, Mariotti & Stevenson, 2012; Borwein, 2012). A useful overview and analysis for the task-design of activities for promoting conjecturing is given by Lin, Yang, Lee, Tabach and Stylianides (2012). Moreover, speaking from my own experience also, honouring students by attaching their names to discovered results is a powerful motivator to continue further mathematical studies (compare Leikin, 2011).

During 2003, a Grade 11 student from a high school in Cape Town was exploring Viviani's theorem using dynamic geometry. The theorem says that the sum of distances of a point to the sides of an equilateral triangle is constant (i.e. in Figure 1 $PP_a + PP_b + PP_c$ is constant, irrespective of the position of point P inside triangle ABC). The student's further exploration led him to measure the distances AP_c, BP_a and CP_b, and then add them. To his surprise, he noticed that $AP_c + BP_a + CP_b$ also remained constant no matter how much he dragged P inside the triangle. However, he could not prove it.

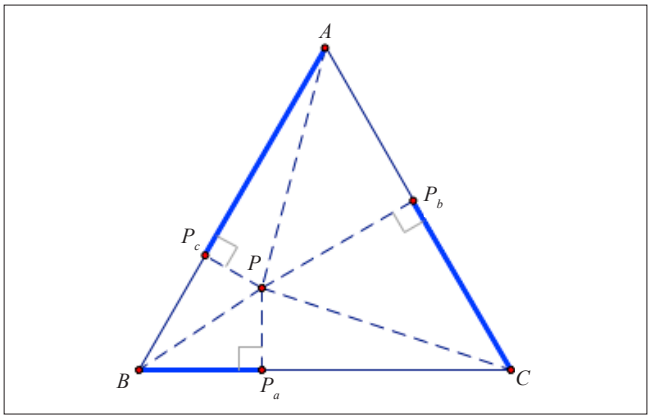


FIGURE 1: Clough's conjecture: $AP_c + BP_a + CP_b$ is constant.

His teacher eventually wrote to me to ask whether I could perhaps produce a simple geometric proof, as he himself could only prove it algebraically by means of co-ordinate geometry. Below is the geometric proof I first produced, followed by further proofs, explorations and different generalisations of what has become known as Clough's conjecture (De Villiers, 2004).

Geometric proof

Problem solving heuristics are valuable in that they often direct the problem solver towards a successful solution of a problem. George Polya (1945) gives the following useful examples:

> Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form? Do you know a related problem? Do you know a theorem that could be useful? Look at the unknown! And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown. Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it? Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible? (p. xvii)

Following Polya's heuristic, it seems natural to try and relate Clough's conjecture to Viviani's theorem and its proof. After several different attempts, I found by constructing perpendiculars to AB, BC and CA as 'auxiliary elements' respectively at A, B and C, that I obtained a triangle KLM as shown in Figure 2.

Considering that $\angle ABK = 30°$, it follows that $\angle AKB = 60°$. In the same way the other angles of ΔKLM can be shown to be equal to 60°; hence ΔKLM is equilateral.

Next, drop perpendiculars from P to sides KM, KL and LM respectively. It then follows that quadrilateral AP_cPA' is a rectangle because all its angles are right angles. Therefore, $A'P = AP_c$, and similarly, $B'P = BP_a$ and $C'P = CP_b$.

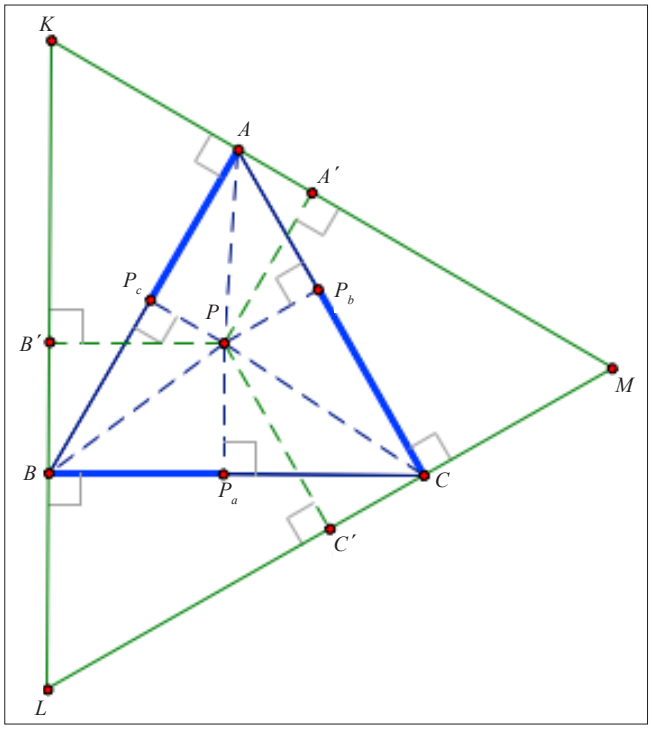


FIGURE 2: A geometric proof of Clough's conjecture.

Clearly the problem is now reduced to Viviani's theorem in relation to ΔKLM. Considering that $A'P + B'P + C'P$ is constant, it follows that $AP_c + BP_a + CP_b$ is also constant. QED.

The preceding proof is quite explanatory (Hanna, 1989) as one can almost immediately 'visually see' from the diagram in one 'gestalt', why the result is true and how it relates to Viviani's theorem.

An alternative 'algebraic' proof

In Polya's final step of problem-solving, namely, looking back, he asks amongst other things whether one can derive or prove the result differently. In doing so, not only is one developing a variety of problem-solving (proving) skills, but one may also gain additional insight into the result. Recently, much has been written and researched about the value of posing such multi-proof tasks to students. Dreyfus, Nardi and Leikin (2012) provide a comprehensive survey and review of this particular field.

Considering that there are several right triangles, it seems reasonable to try the theorem of Pythagoras, and to apply it to each of these triangles and investigate where it leads.

Let $AB = a$, $AP_c = x$, et cetera, as shown in Figure 3. We now need to show that $x + y + z$ is constant. Applying Pythagoras to the right triangles adjacent to the hypotenuses AP, BP and CP, we obtain:

$$x^2 + PP_c^2 = (a-z)^2 + PP_b^2$$
$$y^2 + PP_a^2 = (a-x)^2 + PP_c^2$$
$$z^2 + PP_b^2 = (a-y)^2 + PP_a^2$$

It is often at this point, or even before reaching it, that a novice problem solver might lose hope of getting anywhere as it is not obvious from the start that this will lead somewhere useful. However, students should be encouraged to persist with such an exploration and not so easily give up and start asking for help. One might say that a distinctive characteristic of good mathematical problem solvers are that they are 'stubborn', and willing to spend a long time attacking a problem from

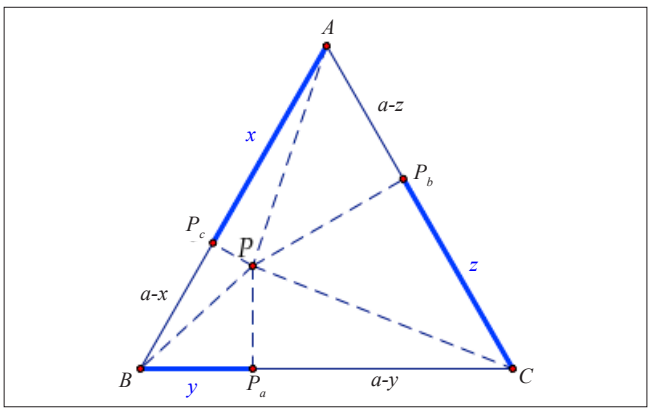


FIGURE 3: An alternative, algebraic proof of Clough's conjecture.

different vantage points and not easily surrendering. In this regard, Schoenfeld (1987, p. 190–191) also specifically refers to the importance of meta-cognition during problem-solving (i.e. maintaining a conscious awareness and control of a variety of possible approaches, and then monitoring how well things are going during the implementation of a possible approach).

If we look at the set of three equations, however, an immediate observation is the cyclic fashion in which terms appear. This suggests that adding the left and right sides of the three equations, respectively, might lead to the quadratic terms cancelling out. Indeed, doing so, after simplification, gives us the desired identity $x + y + z = \frac{3}{2}a$. Considering that a is constant for a fixed equilateral triangle, it completes the proof.

Taking into account that $\frac{3}{2}a$ is half the perimeter of the triangle, we also get the following bonus relationship: $AP_c + BP_a + CP_b = P_cB + P_aC + P_bA$.

Although this algebraic proof appears less explanatory than the preceding geometric one, we have managed to find an additional property of the configuration that was not discovered experimentally, namely, that the sum of these distances is half the perimeter of the triangle. Nor was this clearly evident from the geometric proof at all, although one could now go back armed with this hindsight and use basic trigonometric ratios in Figure 2 to find that the side length of ΔKLM is $\sqrt{3}a$; hence its height is $\frac{3}{2}a$ (which is equal to its Viviani sum).

However, more importantly, because of its cyclic nature, the algebraic proof suggests an immediate generalisation to *equilateral* polygons, giving a nice illustrative example of the discovery function of proof. It is not hard to see (at least for more experienced problem solvers) that from the structure of the proof, it will generalise as follows for an equilateral n-gon $A_1A_2...A_n$ (refer to the notation in Figure 4, showing an equilateral pentagon):

$$x_1^2 + PP_1^2 = (a - x_n)^2 + PP_n^2$$
$$x_2^2 + PP_2^2 = (a - x_1)^2 + PP_1^2$$
$$....$$
$$x_{n-1}^2 + PP_{n-1}{}^2 = (a - x_{n-2})^2 + PP_{n-2}{}^2$$
$$x_n^2 + PP_n^2 = (a - x_{n-1})^2 + PP_{n-1}{}^2$$

By again adding the left and the right sides as before, we get a collapsing 'telescopic effect' with all the squares of PP_n and x_i cancelling out, and all that remains is $0 = na^2 - 2a(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ which simplifies to $\sum x_i = \frac{n}{2}a$, which as before, is also half the perimeter of the equilateral n-gon.

Revisiting the geometric proof

Let us now revisit our explanatory geometric proof. Despite already knowing that Clough's result is true for a rhombus (as it has all its sides equal), let us nonetheless see if we can use the same geometric approach with it as for the triangle, and whether it provides any new insights. By constructing perpendiculars as before to AD, DC, CB and BA respectively at A, D, C and B as shown in Figure 5, we find that the result is visually immediately obvious. For example, perpendiculars a and c are parallel to each other because they are respectively perpendicular to sides AD and BC. Because it is easy to show that FPH is a straight line, we see that $AH + CF$ is simply equal to the constant distance between these two parallel lines. The same applies to the sum of the other two distances BE and DG between the parallel perpendiculars b and d. Therefore, $AH + CF + BE + DG$ is the sum of two constants; hence constant. QED.

In many ways this proof is more explanatory than the preceding algebraic proof, which was more algorithmic, non-visual and required quite a bit of manipulation. Moreover, following Polya, and looking back critically and examining this geometric proof, one should notice that we did *not use the equality of the sides of the rhombus* at all! We only used its property of opposite sides being parallel – it depends only on the *parallel-ness of opposite sides*. This implies that the result will immediately not only generalise to a parallelogram, but also in general to any parallel $2n$-gon ($n > 1$); in other words to any even sided polygon with opposite sides parallel, as the same argument will apply!

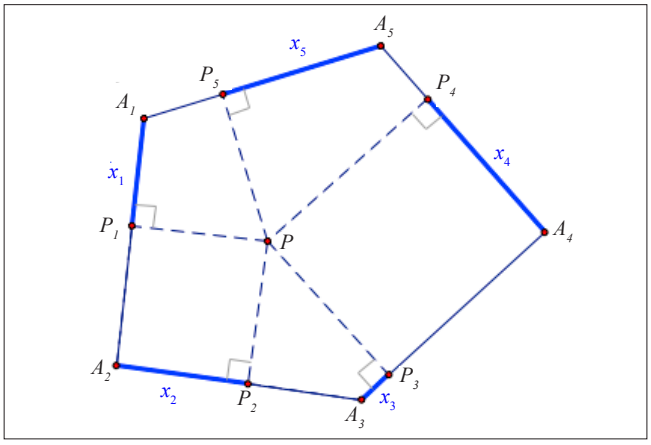


FIGURE 4: An equilateral pentagon.

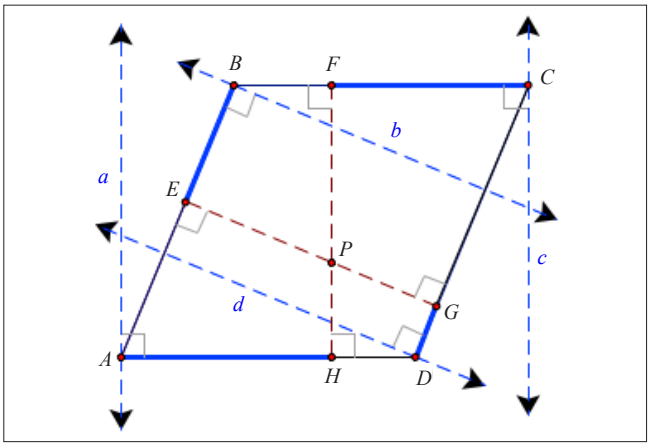


FIGURE 5: A geometric proof for a rhombus.

So here we have another excellent example of the discovery function of proof, leading us to a further generalisation, without any additional experimentation. As shown in Figure 6 for a hexagon with opposite sides parallel, exactly the same argument applies to the sum of the distances *AH* and *DK* respectively on opposite parallel sides, and lying between the two parallel perpendiculars *a* and *d*, et cetera.

Generalising to equi-angled polygons

Given that Viviani's theorem generalises not only to equilateral polygons and 2*n*-gons with opposite sides parallel, but also to equi-angled polygons, it seemed reasonable to investigate whether Clough's theorem is also true for polygons of this kind. Considering that it is true for parallelograms, it is true for the quadrilateral case (a rectangle), but what about an equi-angled pentagon?

A quick construction on Sketchpad showed me that the result was indeed also true for an equi-angled pentagon. Although I personally had no doubt about the equi-angled result from this experimental investigation, I was nonetheless motivated to look for a proof, because I wanted to know *why* it was true, as well as seeing it as an *intellectual challenge* (compare with Hofstadter, 1997, p. 10). It was therefore *not* about the 'removal of doubt' for me at all!

Once again, one can try the same strategy used before by constructing perpendiculars at the vertices and attempt to relate it to something we already know, namely Viviani's generalisation to equi-angled polygons.

Given that *ABCDE* is a pentagon with equal angles as shown in Figure 7, draw perpendiculars to each side at the vertices *A* to *E*, and label as *K* the intersection of the perpendicular from *A* with that of the perpendicular from *E*. Similarly, as shown, label the other intersections of the perpendiculars as *L*, *M*, *N* and *O*. From *Q* draw perpendiculars *QJ* to *AE* and *QX* to *EK* (extended) to obtain rectangle *EJQX*. Therefore, $QX = EJ$.

In the same way, construct rectangles to replace the other four segments *AF*, *BG*, *CH* and *DI* with the corresponding perpendiculars from *Q* to the sides of *KLMNO* as shown. Now note that $\angle EAB = 90° + \angle EAK$, but $\angle OKL = 90° + \angle EAK$, because $\angle OKL$ is the exterior angle of ΔEAK. Hence, $\angle OKL = \angle EAB$.

Similarly, it can be shown that the other angles of the inner pentagon are correspondingly equal to that of the outer one; hence that *KLMNO* is also an equi-angled pentagon. But we know that the sum of the distances from a point to the sides of any equi-angled polygon is constant, and because all these five distances are correspondingly equal to the distances *EJ*, *AF*, *BG*, *CH* and *DI* by construction, the required result follows. QED.

Looking back at this proof, we can also see that we did not use the angle size (108°) specific to the equi-angled pentagon to show that $\angle OKL = \angle EAB$. This immediately implies that for any polygon with equal angles the same construction would produce another equi-angled polygon inside! Hence, the result generalises, and we have here another lovely example of the discovery function of proof.

Another perhaps even easier way of logically explaining the theorem is shown in Figure 8. By translating the segments *BG*, *CH*, *DI* and *EJ* as shown, and then constructing perpendiculars at *A*, *B′*, *C′*, *D′* and *E′*, we produce another

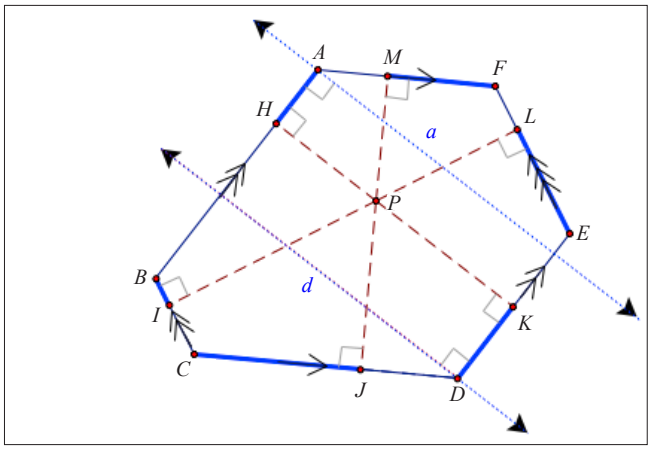


FIGURE 6: A hexagon with opposite sides parallel.

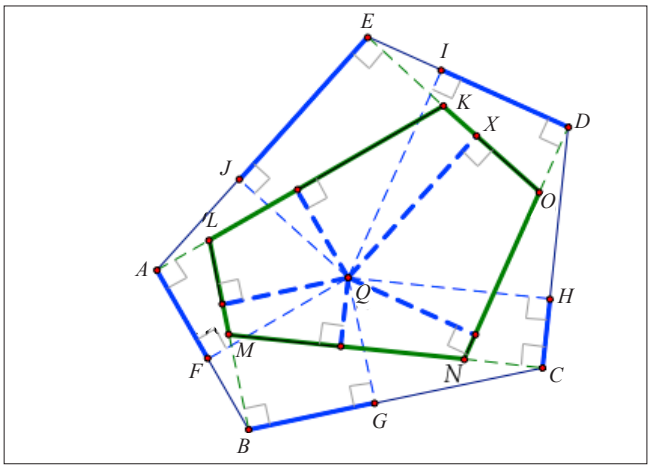


FIGURE 7: An explanatory proof for an equi-angled pentagon.

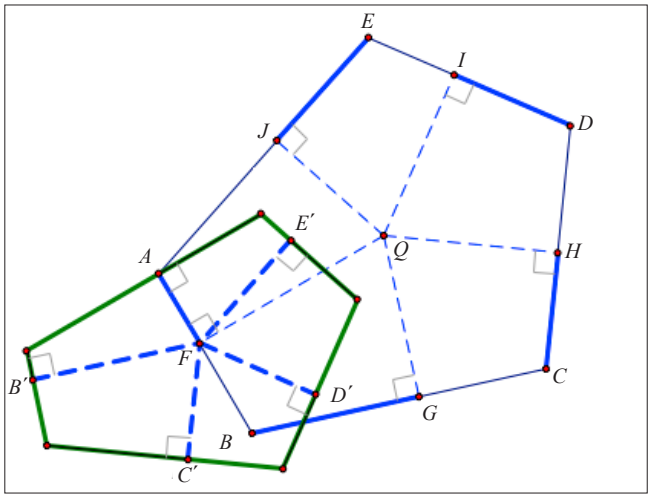


FIGURE 8: An alternative explanation (proof) for an equi-angled pentagon.

equi-angled pentagon (left to the reader to prove) and the result follows as before.

Concluding comments

Although it is probably not feasible to attempt to introduce complete novices to the 'looking back' discovery function of proof with the specific examples illustrated here, I believe it is possible to design learning activities for younger students in the junior secondary school and even in the primary school. This could at least acquaint students with the idea that a deductive argument can provide additional insight and some form of novel discovery.

For example, De Villiers (1993) shows that to algebraically explain why the sum of a two-digit number and its reverse is always divisible by 11 can lead students to see that the other factor is the sum of the digits of the original number, which they may not have noticed from considering only a few cases. This activity has been done many times with both high school students as well as pre-service and in-service teachers. It has been very seldom that any of them noticed this additional property in the empirical phase, and they would express appreciative surprise at finding this out later from the proof when their attention was directed towards it.

Instead of defining proof in terms of its verification function (or any other function for that matter), it is suggested that proof should rather be defined simply as a deductive or logical argument that shows how a particular result can be derived from other proven or assumed results; nothing more, nothing less. It is not here suggested that fidelity to the verification function of proof is sacrificed at all, but that it should not be elevated to a defining characteristic of proof. Moreover, the verification function ought to be supplemented with other important functions of proof using genuine mathematical activities as described above. It is also not suggested that the preceding examples be directly implemented in a classroom as their success will depend largely on the past experience, expertise and ability of the audience, the classroom culture, as well as the skill of the teacher as a facilitator of learning. For example, Zack (1997, p. 1) contends that in her fifth grade classroom 'for an argument to be considered a proof, the students need not only convince, but also to explain'. She then proceeds to give an example of how this broader 'didactical contract' with respect to proof motivated her students to actively engage in conjecturing, refuting and eventually developing a proof as a logical explanation through her continued insistence that they demonstrate *why* the pattern worked.

Leong, Toh, Tay, Quek and Dindyal (2012) similarly describe some success using a worksheet based on Polya's model to guide a high achieving student to 'look back' at his solution and push him to further extend, adapt and generalise his solution. One could speculate, and it might be an interesting longitudinal study, that students who've been exposed to several such activities are more likely to spontaneously start 'looking back' at their solutions to problems and start considering generalisations or pose new questions. Problem posing and generalisation through the utilisation of the 'discovery' function of proof is as important and creative as problem-solving itself, and ways of encouraging this kind of thinking in students need to be further explored.

Johnston-Wilder and Mason (2005, p. 93) and Mason, Burton and Stacey (1982, p. 9) have claimed that generalisation lies at the 'heart' of mathematics and is its 'life-blood', and give many instructive examples. It certainly is an important mathematical activity that students need to engage in far more than is perhaps currently the case in classroom practice. It is important to broadly distinguish between two kinds of generalisation, namely, *inductive* and *deductive* generalisation. With inductive generalisation is meant the generalisation from a number of specific cases by empirical induction or analogy, and is usually the meaning given to the word 'generalisation' in the literature. With deductive generalisation is meant the logical reflection (looking back on) and consequent generalisation of a critical idea to more general or different cases by means of deductive reasoning. In other words, generalising the essence of a deductive argument and applying it to more general or analogous cases. Three examples of this deductive kind of generalisation have been illustrated in this article.

Schopenhauer (as quoted by Polya, 1954) aptly describes the educational value of the process of further generalisation to assist in the integration and synthesis of students' knowledge as follows:

> Proper understanding is, finally, a grasping of relations (*un saisir de rapports*). But we understand a relation more distinctly and more purely when we recognize it as the same in widely different cases and between completely heterogeneous objects. (p. 30)

In terms of learning theory, the process of generalisation corresponds to some extent to 'superordinate learning' as distinguished by Ausubel, Novak and Hanesian (1978, p. 68), where an inclusive idea or concept is generalised or abstracted, under which already established ideas can be meaningfully subsumed.

Finally, it is hoped that this article will stimulate some more design experiments in problem solving as suggested by Schoenfeld (2007), focussing not only on developing appreciation of the explanatory and discovery functions of proof, but also on other functions of proof such as systematisation, communication, intellectual challenge, et cetera. The aim is that ultimately, school curricula, textbooks and teachers can begin to present a more comprehensive, realistic and meaningful view of proof to students.

Acknowledgements

Competing interests

I declare that I have no financial or personal relationships, which may have inappropriately influenced me in writing this article.

References

Anderson, J. (1996). The place of proof in school mathematics. *Mathematics Teaching*, *155*, 33–39.

Appel, K., & Haken, W. (1977). Solution of the four color map problem. *Scientific American*, *237*(4), 108–121. http://dx.doi.org/10.1038/scientificamerican1077-108

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M.G., Leung, A.Y.L., Mariotti, M.A., & Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 97–143). Dordrecht: Springer.

Ausubel, D.P., Novak, D., & Hanesian, H. (1978). *Educational Psychology: A cognitive view*. New York, NY: Holt, Rinehart & Winston.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D.L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Barbin, E. (2010). Evolving geometric proofs in the seventeenth century: From icons to symbols. In G. Hanna, H.N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 237–251). New York, NY: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_16

Bell, A.W. (1976). A study of pupils'proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23–40. http://dx.doi.org/10.1007/BF00144356

Borwein, J. (2012). Exploratory experimentation: Digitally-assisted discovery and proof. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 69–96). Dordrecht: Springer.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 7–24. Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofa.pdf

De Villiers, M. (1993). Computer verification vs. algebraic explanation. *Pythagoras*, *31*, 46. Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/alge.pdf

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *New directions in teaching and learning geometry* (pp. 369–415), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Villiers, M. (1999). A generalization of an IMTS problem. *KwaZulu-Natal AMESA Mathematics Journal*, *4*(1), 12–15. Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/imts.pdf

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad 4*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2004). Clough's conjecture: A Sketchpad investigation. In S. Nieuwoudt, S. Froneman, & P. Nkhoma (Eds.), *Proceedings of the 10th Annual National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa,* Vol. 2 (pp. 52–56). Potchefstroom: AMESA.

De Villiers, M. (2007a). A hexagon result and its generalization via proof. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(2), 188–192.

De Villiers, M. (2007b). An example of the discovery function of proof. *Mathematics in School*, *36*(4), 9–11. Available from http://frink.machighway.com/~dynamicm/crossdiscovery.pdf

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 191–213). Dordrecht: Springer.

French, D., & Stripp, C. (Eds.), (reprinted 2005). *Are you sure? Learning about proof.* Leicester: The Mathematical Association.

Grabiner, J.V. (2012). Why Proof? A historian's perspective. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 147–168). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 45–51). Paris: CNRS.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5–23. http://dx.doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H.N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 85–100), New York, NY: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_7

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 396–428. http://dx.doi.org/10.2307/749651

Hemmi, K., & Löfwall, C. (2011, February). *Making discovery function of proof visible for upper secondary school students*. Paper presented at CERME 7: Working Group on Argumentation and Proof, Rzeszów, Poland. Available from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Lofwall.pdf

Hofstadter, D. (1997). Discovery and dissection of a geometric gem. In D. Schattschneider, & J. King (Eds.). *Geometry turned on!* (pp. 3–14). Washington, DC: MAA.

Horgan, J. (1993). The death of proof. *Scientific American*, *269*(4), 92–103. http://dx.doi.org/10.1038/scientificamerican1093-92

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Paul Chapman Publishing.

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 261–277). Dordrecht: Springer.

Knuth, E.J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379–405. http://dx.doi.org/10.2307/4149959

Leiken, R. (2011). Teaching the mathematically gifted: Featuring a teacher. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 78–89. http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2011.548902

Leong, Y.H., Toh, T.L., Tay, E.G., Quek, K.S., & Dindyal, J. (2012). Relooking 'look back': A student's attempt at problem solving using Polya's model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(3), 357–369. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2011.618558

Lin, F., Yang, K., Lee, K., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305–325). Dordrecht: Springer.

Lockhart, P. (2002) A mathematician's lament. In *Devlin's Angle* (March 2008) at the Mathematical Association of America website. Available from http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Mejía-Ramos, J.P. (2005). Aspects of proof in mathematics. In D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *25*(2). St. Martin's College, Lancaster: Open University. Available from http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip25-2/BSRLM-IP-25-2-11.pdf

Miyazaki, M. (2000). What are essential to apply the "discovery" function of proof in lower secondary mathematics? In T. Nakahara, & K. Mastaka (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 1–8). Hiroshima: Hiroshima University.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). School mathematics theorems: An endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics*, *8*(3), 34–40.

Mudaly, V., & De Villiers, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. *Pythagoras*, *52*, 20–23. Available from http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem solving, and explanation in mathematics teaching. In G. Hanna, H.N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 223–236). New York, NY: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_15

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*, (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5–41. http://dx.doi.org/10.1093/philmat/7.1.5

Reid, D. (2002). What is Proof? *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, June 2002. Available from http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/02Ete/WhatIsProof.pdf

Reid, D. (2011, October). *Understanding proof and transforming teaching*. Paper presented at the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Reno, NV: PME-NA. Available from http://pmena.org/2011/presentations/PMENA_2011_Reid.pdf

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: Research and theory, practice and politics. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*, 537–551. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-007-0038-z

Stylianides, A.J., & Ball, D.L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 307–332. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, A.J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, *32*(1), Art. #14, 10 pages. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.14

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161–177. http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1994-00502-6

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong": Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 291–298). Lahti, Finland: PME. Available from http://meru-urem.ca/articles/Zack1997(PME-Finland).pdf

Dancan Clough: Clough's Theorem (a variation of Viviani) and some Generalizations

Godine 2003. **Dancan Clough** učenik 11. razreda srednje škole *Bishops Diocesan College* u Cape Townu u Južnoj Africi napisao je tekst koji je Michael de Villiers naslovio *Clough's Theorem (a variation of Viviani) and some Generalizations*. Tekst i dinamične datoteke koje su kreirane pomoću Web Sketchpada možete vidjeti na web stranici http://dynamicmathematiclearning.com/clough.html.

9. Popis knjiga i članaka Michaela de Villiersa

Knjige/Izvješća o istraživanju i poglavlja u knjigama

1. *Boole-algebra op skool*, IMSTUS, Stellenbosch June 1983.
2. *Die vakperspektief van voornemende wiskunde-onderwysers: 'n teoretiese en empiriese studie*, RUMEUS, Stellenbosch, June 1985.
3. *Boole-algebra op Skool/Boolean Algebra at School* (Revised Edition), RUMEUS, Stellenbosch, March 1986.
4. *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*, Studies in Mathematics Education no.2, RUMEUS, Stellenbosch, 1986.
5. *Teaching Boolean Algebra along Van Hiele lines and using meta-mathematical perspectives*, RUMEUS, Stellenbosch, 1986.
6. *Elementere Logika/Elementary Logic*, RUMEUS, Stellenbosch, Aug 1987.
7. *Research Evidence on Hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory: Some critical comments.* Internal RUMEUS Report no. 10, University of Stellenbosch, 1987.
8. *Wiskundige modellering in aksie in enkele situasies/Mathematical modelling in action in some situations.* Inter-campus Publications/Rumeus, Stellenbosch, 1988.
9. *Unquenchable Thirst*, Lux Verbi, Cape Town, 1988.
10. *Alternatiewe aanbiedingstrategieë in meetkunde-onderwys: 'n Teoretiese en Empiriese ondersoek*, In cooperation with P.G. Human, J.H. Nel, T.P. Dreyer and S.F.G. Wessels, Final report on the USEME-Project, RUMEUS, 1989.
11. *Inductive and deductive reasoning: logic and proof.* Chapter in Moodley, M., Presmeg, N. & Njisane, R. (Eds.).Mathematics Education for in-service and pre-service teachers. Shuter & Shooter, Pietermaritzburg, 1992.
12. *The mathematics of voting: is democracy mathematically obtainable?* CASME, University of Natal, 1993.
13. *Some adventures in Euclidean geometry.* University of Durban-Westville, 1996.
14. *Is Democracy Fair? The Mathematics of Voting and Apportionment.* Key Curriculum Press, Berkeley, CA., 1996. (Co-author; Leslie Nielsen).
15. *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some personal reflections.* Chapter in Schattschneider, D. & King, J. (1997). Geometry Turned On! Washington: MAA, pp. 15-24.
16. *Alternative teaching strategies in geometry education: A Theoretical & Empirical Study.* In cooperation with P.G. Human, J.H. Nel, T.P. Dreyer and S.F.G. Wessels, A translation of the Final report on the USEME-Project, RUMEUS, 1997.

17. *An alternative approach to proof in dynamic geometry.* Chapter in Lehrer, R. & Chazan, D. (Ed). (1998). New directions in teaching and learning geometry. Lawrence Erlbaum.

18. *Rethinking Proof with Sketchpad.* (1999). Key Curriculum Press, USA.

19. *Water Supply & Distances.* (2001). Modules in Makae, E.J, M. Nhlapo et al. Let's Talk Mathematics! (Grade 9 Mathematics Textbook), Juta-Gariep Publishers.

20. *Rethinking Proof with Sketchpad 4.* (2003). Key Curriculum Press, USA.

21. *An Alternative Introduction to Proof in Dynamic Geometry. Moving on with Dynamic Geometry,* 2005, Derby: UK, Association for Teachers of Mathematics, pp. 53-59.

22. *Proof and Proving in Mathematics Education*, Discussion Document of ICMI-19 Study, 2008. With Gila Hanna, available at http://jps.library.utoronto.ca/ocs/index.php?cf=8

24. *Defining in Geometry.* (With R. Govender, N. Patterson). Seventy-first NCTM Yearbook: Understanding Geometry for a Changing World, (2009), Craine, T. & Rubinstein, R. (Eds). Reston:VA, NCTM, pp. 189-203.

25. *Proof and Proving in Mathematics Education.* (International Commission for Mathematical Instruction (ICMI) Study 19 Proceedings.) Co-Editor with G. Hanna, FL Lin, FJ Hsieh. Taipei: National Taiwan Normal University, Vol. 1 & Vol. 2, 2009.

26. *Some Adventures in Euclidean Geometry*, (revised version), LULU Publishers, 2009.

27. *The role of experimentation in mathematics and mathematics education. Explanation and Proof in Mathematics*, (2010), Hanna, G. & Jahnke, H. (Eds). Basel: Springer Books.

28. *Boolean Algebra at School*, (revised version), LULU Publishers, 2010.

29. *Elementary Logic*, (republished), LULU Publishers, 2011.

30. *Proof and proving in mathematics education*, Co-edited with Gila Hanna, ICMI-19 Study, Basel: Springer books, 2012. http://www.springer.com/education+

31. *Making Democracy Fair: The Mathematics of Voting & Apportionment*, (republished), Co-Author: Leslie Nielsen, LULU Publishers, 2012.

32. *Proof Technology: Implications for Teaching.* G. Hanna, D. Reid & M. de Villiers. In Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Gila Hanna, David Reid, Michael de Villiers, (Editors), Springer Publishers, 2019, pp. 3-9.

33. *The intimate interplay between experimentation and deduction: some classroom implications.* (Co-author, H-N, Jahnke). In: Bharath Sriraman (ed.) Experimentation in Mathematics Education, Springer, planned publication 2022.

Članci

1. *Wiskunde Projekte* - Spectrum, 19(1), pp. 23-30, March 1981.

2. *'n Inleiding tot kwadratiese vergelykings en die parabool* - Spectrum, 19(3), pp.38-39, October 1981.

3. *Minder donkiewerk* - Spectrum 19(3), p.40, October 1981.

4. *Verrykende werk met grafieke in die fisika op skool* - Spectrum 20(2), pp.22-25, June 1982.

5. *'n Veralgemening van Pythagoras se stelling* - Spectrum 20(3) , pp.27-30, October 1982.
6. *Boole-algebra op Skool* - Imstusnews No.5, p.13, 1981.
7. *Boole-algebra op Skool* - Imstusnews No.6, p.13, 1982.
8. *Boole-algebra op Skool* - Imstusnews No.7, p.11-12, 1983.
9. *Die ontwikkelingswyses van nuwe inhoude in die wiskunde as 'n basiese grondslag vir die metodiek van skoolwiskunde* - Die Unie, pp.253-256, April 1983.
10. *Rewolusionere oorlog as 'n tema vir jeugweerbaarheid* - Die Unie, pp.133-137, November 1983.
11. *Enter the Calculator, enter straight-line fitting* - Spectrum 22(3) , pp.23-27, October 1984, (co-author: A.I. Olivier).
12. *Funksies as modelle* - Imstusnews No.9, pp.13-14, 1984.
13. *Interessanthede uit wiskunde* - Imstusnews No.9, pp.6-7, 1984.
14. *Funksies as modelle (vervolg)* - Imstusnews No.10, p.10, November 1984.
15. *Descartes and the Tangent-Secant Relationship* - Mathematical Digest, p.1, July 1984.
16. *Het u geweet?* - Imstusnews No.12, pp.17-18, 1985.
17. *A mathematical look at a well-known card-trick*, The International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol 17 no 2, pp.149-156, 1986.
18. *Perspektiewe van voornemende Wiskunde-onderwysers op Wiskunde as vak*, Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Opvoedkunde, Vol 6, No.3, pp.174-181, August 1986.

9. *Die ontwikkelingswyses van nuwe inhoude in die wiskunde as 'n basiese grondslag vir die metodiek van skoolwiskunde* - Die Unie, pp.253-256, April 1983.
10. *Rewolusionere oorlog as 'n tema vir jeugweerbaarheid* - Die Unie, pp.133-137, November 1983.
11. *Enter the Calculator, enter straight-line fitting* - Spectrum 22(3) , pp.23-27, October 1984, (co-author: A.I. Olivier).
12. *Funksies as modelle* - Imstusnews No.9, pp.13-14, 1984.
13. *Interessanthede uit wiskunde* - Imstusnews No.9, pp.6-7, 1984.
14. *Funksies as modelle (vervolg)* - Imstusnews No.10, p.10, November 1984.
15. *Descartes and the Tangent-Secant Relationship* - Mathematical Digest, p.1, July 1984.
16. *Het u geweet?* - Imstusnews No.12, pp.17-18, 1985.
17. *A mathematical look at a well-known card-trick*, The International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol 17 no 2, pp.149-156, 1986.
18. *Perspektiewe van voornemende Wiskunde-onderwysers op Wiskunde as vak*, Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Opvoedkunde, Vol 6, No.3, pp.174-181, August 1986.

19. *In Wiskundige gesprek met 'n aantal Amerikaanse studente*, Spectrum 24(3), pp.38-41, August 1986.
20. *Die beantwoording van enkele elementere vrae oor toernooie*, Spectrum, 24(4), pp.34-37, October 1986.
21. *Ter verdediging van die "deep-end strategy"*, Spectrum, 25(1), p.42, February 1987.

22. *Algemene beheersingsvlakke van sekere wiskundige begrippe en werkwyses deur voornemende Wiskunde-onderwysers*, S.A. Tydskrif vir Opvoedkunde. vol.7, No.1, pp.34-41, February 1987.
23. *Toernooie*, Spectrum, 25(2), pp.31-32, May 1987.
24. *A mathematical look at a well-known card-trick (revisited)*, The International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.18, No.4, pp.643-646, 1987.
25. *'n Bewys deur Matematiese Induksie van 'n bekende bewering*, Imstusnews no.15, p.12, March 1987.
26. *Maresa's Problem*, Mathematics in School, Vol 16, No.3, pp.14-15,, March 1987. (Co-author: J.C. Murray).
27. *Teaching Modeling and Axiomatization with Boolean Algebra*, Mathematics Teacher, Vol.80, No.7, pp.528-532, October 1987.
28. *'n Voorbeeld van Modellering met Trapfunksies*. Imstusnews, no.16, pp.18-19, November 1987.
29. *Multi-cultural mathematics*. Mathematics in School, 17(2), pp.46-47, March 1988.
30. *What happens if?* Pythagoras, 17, pp.37-38, May 1988.
31. *Hoe beinvloed die wind 'n mens se hardlooptyd?* Pythagoras, 17, pp.31-32, May 1988.
32. *'n Bewys deur matematiese induksie van 'n bekende bewering*. Spectrum 26(3), p.38, August 1988.
33. *Hoe beinvloed die wind 'n mens se hardloop tyd? 'n Verdere uitbreiding*. Pythagoras, 18, pp.31-33, November 1988.
34. *What happens if? Why?* Pythagoras, 18, pp.45-47, November 1988.
35. *Modelling with Stepfunctions*. Mathematics in School, pp.8-10, November 1988.
36. *Freda se reël*. Pythagoras, 19, pp.19, April 1989.
37. *Die Vorentoe Aangee: 'n Kontroversiële reël*. Pythagoras. 19, pp.27-30, April 1989.
38. *'n Klassifiserings-en definiëringsepisode uit die klaskamer*. Spectrum, 27(2), 45-49, May 1989.
39. *Meetkunde, meting en intuisie*. Pythagoras, 20, 44-45, July 1989.
40. *Descartes*. Pythagoras, 20, 50-52, July 1989.
41. *'n Induktiewe afleiding van die formule*. Spectrum, 27(3), 28-29, August 1989.
42. *From "TO POLY" to generalized poly-figures and their classification: a learning experience*. International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 20(4), 585-603, August 1989.
43. *Vereenvoudiging of Komplisering?* Pythagoras, 21, 8-9, November 1989.
44. *Meetkunde, verklaring en insig*. Pythagoras, 21, 33-38, November 1989.
45. *All cubic polynomials are point symmetric*. Imstusnews, 19, 15-16, November 1989.
46. *'n Kritiese vergelyking van twee Van Hiele-toetsinstrumente*. S.A. Tydskrif vir Opvoedkunde, 10(1), Feb 1990, 68-74 (co-author: E.C. Smith).
47. *Wiskundige leesbekwaamheid*. SA Tydskrif vir Opvoedkunde 10(1), Feb 1990, 24-30 (co-authors: G.J. Joubert, J.C. Smith and P.G. Human).
48. *All parabolas similar? Never!* Spectrum, 28(2), 18-21, May 1990.

49. *The role and function of proof in mathematics*. Pythagoras 24, 17-24, Nov 1990.
50. *A counterexample to Kendal's Theorem*. Pythagoras 24, 5, Nov 1990.
51. *Beyond cyclic convex hexagons*. Mathematical Digest 82, 4-5, Jan 1991.
52. *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry*. Pythagoras, 26, July 18-27, 1991.
53. *How does the wind affect road-running achievement?* Physics Teacher, 286-289, May 1991.
54. *Another generalization of the Theorem of Pythagoras*. Spectrum. 20(3), 41-43, 1991.
55. *Vertical line and point symmetries of differentiable functions*. International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 22(4), 621-644, 1991.
56. *Another dual of Turnbull's Theorem*. Mathematical Digest, 85, 8, 1991.
57. *The meaning of S0 and a further generalization of Kendal's theorem*. Pythagoras, 27,7-8, Nov. 1991.
58. *Cabri-geometré*. Review in Pythagoras. 27, 43-48, Nov. 1991.
59. *Revisiting right polygons*. Pythagoras, 28, 4, 1992.
60. *All cubic polynomials are affine equivalent*. Imstusnews, 22, 3-5, 1992.
61. *Revisiting another generalization of Pythagoras*. Spectrum, 30(4), 31, 1992.
62. *The theorem of Pythagoras: Generalizing from right triangles to right polygons*. Spectrum, 30(4), 54-55, 1992.
63. *Using duality in the discovery of some new results*. Mathematical Digest, 89, 4-8, 1992.
64. *Die affiene invariansie en lynsimmetrieë van die kegelsnedes*. Pythagoras, 29, 31-37, 1992.
65. *Conviction and explanation within the context of geometry*. S.A. Journal of Education, 12(4), 464-467, 1992.
66. *Relevant, contextualised teaching versus irrelevant, decontextualised teaching*. Pythagoras, 29, 3, 1992.
67. *The danger of prescriptive teaching*. Pythagoras, 30, 3-4, 1992.
68. *Worksheets: Order of operations*. Pythagoras, 30, 43-48, 1992.
69. *Revisiting the duality between incentres and circumcentres*. Mathematical Digest, 91, 4-6, 1993.
70. *Modelling as a teaching strategy*. Pythagoras, 31, 3-4, 1993.
71. *Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving*. (Co-author: H. Schumann, Univ. Weingarten). Pythagoras, 31, 9-20, 1993.
72. *Computer and algebraic proof: verification and explanation*. Pythagoras, 31, 21;46, 1993.
73. *Transformations: a golden thread in school mathematics*. Spectrum, 31(4), 11-18, 1993.
74. *A unifying generalization of Turnbull's theorem*. International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 24(2), 191-196, 1993.
75. *Palindromes: an unsolved problem*. Pythagoras, 32, 19-20, 1993.

76. *Counter-examples to Noble's conjecture*. Imstusnews, 23, 4-6, 1993.

77. *El papel y la funcion de la demonstracion en matematicas*. (Spanish translation of earlier article "The role and function of proof in mathematics", Pythagoras, 24, 1990). Epsilon, 26, 15-30, 1993.

77. *The affine invariance and line symmetries of the conics*. Australian Senior Mathematics Journal, 7(2), 32-50, 1993.

79. *A mathematical look at "voting power"*. Pythagoras, 33, 33-36, 1994.

80. *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the learning of mathematics, 14(1), 11-18, 1994.

81. *A question of fairness: How SA's legislators have chosen the wrong method of apportioning seats under the Interim Constitution*. Finance Week, 24-30 March, 24-25, 1994.

82. *All parabola similar? Never!* (Reprint of earlier article in Spectrum, 28(2), 1990). Pythagoras, 34, 26-30, 1994.

83. *The role of technology in mathematical modelling*. Pythagoras, 35, 34-42, Dec 1994.

84. *The role and function of proof*. (Summary). Discovering Geometry Newsletter, 5(2), 2-5, 1994.

85. *The meaning of proof for a mathematical researcher*. Notices of the AMS, Feb, 221, 1995.

86. *An alternative introduction to proof in dynamic geometry*. MicroMath, 14-19, Spring 1995.

87. *Conjecture and proof with Sketchpad: A case study*. Pythagoras, 37, 30-32, Aug 1995.

88. *What makes a good mathematics teacher?* (Editorial). Pythagoras, 37, 3, Aug 1995.

89. *A generalization of the Fermat-Torricelli point*. The Mathematical Gazette, 79(485), 374-378, July 1995.

90. *Die proporsionele toekenning van sitplekke in die finale grondwet*. Spectrum, 33(3), 18-19, Aug 1995.

91. *The voting power of the various parties at national and provincial level*. Spectrum, 33(3), 36-37, Aug 1995.

92. *A generalized dual of Napoleon's theorem and some further extensions*. Int. J. Math. Ed. Sci. Technol., 26(2), 233-241, 1995. (Co-author: J. Meyer, UOFS).

93. *The handling of geometry definitions in school textbooks*. (Editorial). Pythagoras, 38, 3-4, Dec 1995.

94. *Variations on Fermat: An example of problem posing*. KZN Amesa Journal, 1(1), 16-18, Dec 1995.

95. *Two examples of problem posing*. Pythagoras, 39, 15-19, April 1996.

96. *Why proof in dynamic geometry?* Mathematics in College, 40-41, June 1996.

97. *Worksheets. (On angle and perpendicular bisectors)*. Pythagoras, 40, 41-52, Aug 1996.

98. *A dual to Kosnita's theorem*. Mathematics & Informatics Quarterly, 6(3), 169-171, Sept 1996.

99. *The Sokal Affair & Science Wars*. (Editorial). Pythagoras, 41, 4-6, Dec 1996.

100. *Investigate Further!* (Continued). Pythagoras, 41, 31-37, Dec 1996.

101. *Response to Brodie*. (Letter to Editor). Pythagoras, 42, 9-12, April 1997.

102. *Sketchpad Investigation: Distances*. Pythagoras, 42, 49-52, April 1997.

103. *The future of secondary school geometry*. Pythagoras, 44, 37-54, Dec 1997.

104. *A Sketchpad discovery involving triangles and quadrilaterals*. (1998). KZN AMESA Math Journal, Vol 3, No 1, 11-18.

105. *Dual generalizations of Van Aubel's theorem*. (1998). Mathematical Gazette, Nov, 82(496), 405-412.

106. *Conjecturing as an initial introduction to proof*. (1998). Mathematics Teacher, Nov, 91 (8), 737-738.

107. *Generalizations involving Maltitudes*. (1999). Int. J. Math. Ed. Sci. Technol.; 30(4), 541-548.

108. *A further generalization of the Fermat-Torricelli point*. (1999). Mathematical Gazette, March, 14-16.

109. *A Generalization of an IMTS problem*. (1999). AMESA KZN Mathematics Journal. 4(1), March, 12-15.

110. *A Sketchpad discovery involving areas of inscribed polygons*. (1999). Mathematics in School.; 28(1), March, 18-21.

111. *A Mathematical Treasure Hunt*. (1999). AMESA KZN Mathematics Journal. 4(2), Nov, 23-28.

112. *Place Kicking Locus in Rugby*. (1999). Pythagoras, 49, Aug, 64-67.

113. *Stars: A Second Look*. (1999). Mathematics in School, 28(5), Nov, 30.

114. *Sketchpad Solutions and Results*. (2000). Mathematical Digest, 118, Jan, 24-27.

115. *More on dual Van Aubel generalisations*. (2000). Mathematical Gazette, March, 59-60.

116. *A Fibonacci generalization: A Lakatosian example*. (2000). Mathematics in College, 10-29.

117. *A Fibonacci generalization and its dual*. (2000). Int. J. Math. Ed. Sci. Technol, 31(3), Nov, 447-477.

118. *A Dual, and Generalizations, of a Sharp result*. (2000). AMESA KZN Mathematics Journal. 5(2), Nov, 16-18.

119. *Overlapping Circles*, (2000). AMESA KZN Mathematics Journal. 5(2), 42.

120. *Generalizing Van Aubel Using Duality*. (2000). Mathematics Magazine, 73(4), Oct, 303-306.

121. *Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry*. (2000). Pythagoras, 52, Aug, 20-23. (Co-author: V. Mudaly).

122. *Sketchpad Solutions and Results*. (2001). Mathematical Digest, 122, Jan, 8-11.

123. *We salute the Van Hieles! In Proceedings of Honorary Award Function for Dr PM van Hiele*, February 2001, UNISA.

124. *Papel e funcoes da demonstracao no trabalho com o Sketchpad*. (2001). Educacao 'e Matematica, June, No. 63, pp. 31-36. (Portuguese translation of "Role and Function of Proof" from Rethinking Proof.)

125. *The Precious Metal Ratios*. (2001). KZN Mathematics Journal, Vol. 6, No. 1, April, pp. 29-32.

126. *Reader Investigations*. (2001). KZN Mathematics Journal, Vol. 6, No. 1, April, pp. 35-38.

127. *Game, maths, and luck!* (2001). Pythagoras. No. 53, pp. 14-17.

128. *Pathways to proof*. (2001). The Times Educational Supplement (Mathematics), 21 Sept 2001, p. 19.

129. *Reader Investigations*. (2001). KZN Mathematics Journal, Vol. 6, No. 2, Nov/Dec, pp. 36-39.

130. *A generalisation of Neuberg's theorem and the Simson line*. (2001). KZN Mathematics Journal, Vol. 6, No. 2, Nov/Dec, pp. 16-23.

131. *From nested Miquel triangles to Miquel distances*. (2002). Mathematical Gazette, 86(507), Nov., 390-395.

132. *A Dual to a BMO problem*. (2002). Mathematical Gazette, 86(505), March, 73-74.

133. *Sketchpad Solutions*. (2002). Mathematical Digest, No. 126, Jan, 25. (Also at http://mweb.co.za/residents/profmd/spsol01.pdf).

134. *A Further Pythagorean Variation on a Fibonacci Theme*. (2002). Mathematics in School, 31(5), Nov., 22.

135. *Euler's Inequality Revisited*. (2003). Mathematical Digest, 130, Jan., p.6.

136. *Solving Linear Equations: Linking Teacher Strategies & Learner Outcomes*. (2003). KZN Mathematics Journal, Vol. 7, No. 1, Feb, pp. 26-37. (Co-author: Linda van Laren, Edgewood College of Education).

137. *Constructive Evaluation of Definitions in a Dynamic Geometry Context*. (2003). Journal of the Korea Society of Mathematical Education, 7(1), March, 41-58. (Co-author: Rajen Govender, University of the North). Available to download from: http://www.mathnet.or.kr/mathnet/kms tex/980829.pdf

138. *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad*. (2003). Translated into Hebrew. Aleh, 30, May, 19-26.

139. *The Affine Equivalence of Cubic Polynomials*. (2003). KZN Mathematics Journal, Vol. 7, No. 2, Nov., pp. 5-10.

140. *Solutions to Reader Investigations*. (2003). KZN Mathematics Journal, Vol. 7, No. 2, Nov., pp. 44-48.

141. *The Role and Function of Quasi-empirical Methods in Mathematics*. (2004). Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, Vol. 4, No. 3 (July), pp. 397-418.

142. *Using Dynamic Geometry to Expand Mathematics Teachers' Understanding of Proof*. (2004). Int. J. Math. Ed. Sci. Technol. Vol. 35, No. 5, Sept/Oct, pp. 703-724.

143. *All cubic polynomials are point-symmetric*. Learning & Teaching Mathematics, April 2004, No. 1, pp. 12-15.

144. *An investigation into Teachers' Views, Interpretation and Implementation of Continuous assessment in Grade 12 Higher Grade in the Ethekwini* KZN AMESA Mathematics Journal, May 2004, 8(1), pp. 18-24. (Together with Suren Deonarain).

145. *A dynamic approach to quadrilateral definitions*. (June, 2004). Pythagoras, 58, pp. 34-45. (Together with Rajen Govender, Univ. of North).

146. *Crookes' and Monteith's Proof of a Classic Problem*, KZN AMESA Mathematics Journal, Dec 2004, 8(2), pp. 34-37.

147. *Solutions to Reader Problems*, KZN AMESA Mathematics Journal, Dec 2004, 8(2), pp. 41-48.

148. *Ezit's Rule: An Explanation and Proof.* (2005). Learning & Teaching Mathematics, No. 2, Feb 2005, pp. 50-54.

149. *Feedback: Feynman's Triangle.* (2005). The Mathematical Gazette, 89 (514), March 2005, p. 107.

150. *Crocodiles and Polygons.* (2005). Mathematics in School, March 2005, pp. 2-4.

151. *A Generalization of the Nine-point Circle and the Euler Line.* (Dec, 2005). Pythagoras, 62, pp. 31-35.

152. *Solutions to Reader Investigations.* KZN AMESA Mathematics Journal, Vol. 9, 2005, pp. 62-66.

153. *The nine-point conic: a rediscovery and proof by computer.* (Jan, 2006). International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, Vol. 37, No. 1, pp. 7-14.

154. *Recycling cyclic polygons dynamically.* Mathematics in School,Vol 35, No. 3, (May 2006), pp. 2-4.

155. *A generalization of the Spieker circle and Nagel line.* (August, 2006). Pythagoras, 63, pp. 30-37.

156. *More on Hexagons with Opposite Sides Parallel*, The Mathematical Gazette, Nov 2006, pp. 517-518.

157. *Further reflection on a SA Mathematics Olympiad Problem*, Teaching & Learning Mathematics, Feb 2007, No. 4, pp. 25-27.

158. *Some Pitfalls of Dynamic Geometry*, Teaching & Learning Mathematics, Feb 2007, No. 4, pp. 46-52.

159. *A hexagon result and its generalization via proof*, The Montana Mathematics Enthusiast, June 2007, Vol. 4, No. 2, pp. 188-192. At http://www.math.umt.edu/TMME/vol4no2/

160. *An example of the discovery function of proof*, Mathematics in School, Sept 2007, Vol. 36, no. 4, pp. 9-11. At http://frink.machighway.com/dynamicm/crossdiscovery.pdf

161. *A question of balance: an application of centroids*, The Mathematical Gazette, Nov 2007, Vol. 91, no. 522, pp. 525-528.

162. *Problem-solving and Proving via Generalization.* (Co-author: Mary Garner). Learning & Teaching Mathematics, April 2008, No. 5, pp. 19-25.

163. *Some novel cyclic quadrilateral proofs.* Learning & Teaching Mathematics, April 2008, No. 5, p. 3.

164. *Revisiting: A question of balance: an application of centroids*, The Mathematical Gazette, March 2008, Vol. 92, no. 523, pp. 167-169.

165. *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education.* (With Gila Hanna on behalf of IPC). ZDM Mathematics Education (2008) 40:329-336.

166. *Solving a locus problem via generalization.* Reflections, Spring 2008, pp. 20-21.

167. *Generalizacija kružnice 9 točaka i Eulerova pravca.* (A generalization of the 9-point circle and Euler line). Translated into Croatian for journal of Croatian Mathematical Association, Poučak, no. 34, Lipanj 2008, pp. 35-44.

168. *Reader Reflections: Star Polygons*. Mathematics Teacher, Oct. 2008, Vol. 102, No. 3, p. 170.

169. *Generalizing the Nagel line to Circumscribed Polygons by Analogy & Constructive Defining*. (2008). Pythagoras, Dec 2008, no. 68, pp. 32-40.

170. *LTM Cover Problem*. Learning & Teaching Mathematics. No.7, 2009, pp. 57-58.

171. *Reflecting on "Talking Geometry"*. Learning & Teaching Mathematics. No. 7, 2009, pp. 54-56.

172. *Generalizing the Golden Ratio and Fibonacci*. Learning & Teaching Mathematics. No. 7, 2009, pp. 39-41.

173. *Some Hexagon Area Ratios: Problem Solving by Related Example*. Mathematics in School, Vol. 39, no. 1 (Jan 2010), pp. 21-24.

174. *A tessellating no-smoking sign*. Learning & Teaching Mathematics, no. 8, July 2010, pp. 22-23.

175. *Vanaf die Fermat punte na die De Villiers punte van 'n driehoek*. (From the Fermat points to the De Villiers points of a triangle). Die Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap & Tegnologie. (South African Journal for Science & Technology). Vol. 29, no. 3, Sept 2010, pp. 119-129.

176. *Learning to define in geometry*. Notices of the SA Mathematical Society (SAMS), Volume 41, Number 2, September 2010, pp 41-57.

177. *Algumas reflexoes sobre a Teoria de Van Hiele*. Educaçao Matemática Pesquisa ISSN 1983-3156, v. 12, n. 3 (2010), pp. 401-431. (Available online at http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167/3696)

178. *Proof without words: Parallelo-hexagon-parallelogram area ratio*. Learning & Teaching Mathematics, no. 10, May 2011, p. 23.

179. *Equi-angled cyclic and equilateral circumscribed polygons*. The Mathematical Gazette, 95(532), March 2011, pp. 102-106.

180. *An interesting cyclic quadrilateral result*. Mathematical Digest, no. 163, April 2011, pp. 6-7.

181. *Simply Symmetric*. Mathematics Teaching, March 2011, no. 211, pp. 34-36.

182. *A correct visual proof of the area of a trapezium*. Learning and Teaching Mathematics, no. 10, May 2011, p. 46.

183. *Did you know? Euclid's partition definitions*. Learning and Teaching Mathematics, no. 10, May 2011, p. 32.

184. *Feedback: Note 95.14, Equi-angled cyclic and equilateral circumscribed polygons*. The Mathematical Gazette, 95(533), July 2011, p. 361.

185. *Simply Symmetric*. (Republished). Learning and Teaching Mathematics, August 2011, Vol. 11, pp. 22-]26.

186. *An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad*. Ndlovu, M., Wessels, D., & De Villiers, M. (2011). Pythagoras, 32(2), Art. #52, 15 pages. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i2.52

187. *Generalizing a problem of Sylvester*. Mathematical Gazette, 96(535), March 2012, pp. 78-81.

188. *Relations between the sides and diagonals of a set of hexagons*. The Mathematical Gazette, 96(536), July 2012, pp. 309-315.

189. *A simple visual proof of the Theorem of Pythagoras*. Learning and Teaching Mathematics, no. 12, June 2012, p. 8.

189. *What is the function?* Learning and Teaching Mathematics, no. 12, June 2012, pp. 16-18.

190. *LTM Cover diagram, February 2006*. Learning and Teaching Mathematics, no. 12, June 2012, pp. 34-35.

191. *Deriving the composite formulae for sine from Ptolemy*. Learning and Teaching Mathematics, no. 13, Dec 2012, p. 19.

192. *An example of the explanatory and discovery function of proof*. Pythagoras, 33(3), Dec 2012, Art. #193, 8 pages. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i3.193 193, Another proof of De Opgave 2011. Euclides, Dec 2012, p. 133.

194. *3D Generalizations of Viviani's Theorem*. (2013). The Mathematical Gazette, pp. 441-445.

195. *Generalizing a theorem of Arsalan Wares*. Scottish Mathematical Council Journal, 42, Dec 2012, pp. 41-43.

196. *Generalizing a 19th Century result about an ellipse*. The Mathematical Gazette. (With Michael Fox).

197. *Equality is not always 'best'!* Learning & Teaching Mathematics, No. 14, 2013, pp. 17-21.

198. *Reflecting on a 2nd Round 2013 SA Mathematics Olympiad Problem*. Learning & Teaching Mathematics, No. 14, 2013, pp. 34-35.

199. *Why Still Factorize Algebraic Expressions by Hand?* Learning & Teaching Mathematics, No. 14, 2013, pp. 44-46.

200. *A Trapezium Theorem Generalized*. At Right Angles, Vol. 2, No. 3, Nov 2013, pp. 53-56.

201. *Competencies in using Sketchpad in geometry teaching and learning: Experiences of preservice teachers*. African Journal of Research in MST Education. 17(3): 231-243. ISSN: 1028-8457. (Co-authors: Ndlovu M, Wessels D, 2013) A Taylor & Francis journal. Available from: http://reference.sabinet.co.za/webx/access/electronic journals/saarmste/saarmste v17 n3 a5. Pdf

202. *A trisection concurrency: A variation on a median theme*. (Co-author: Shunmugam Pillay). Learning & Teaching Mathematics, no. 15, Dec 2013, pp. 41-45.

203. *A variation of Miquel's theorem and its generalization*. The Mathematical Gazette, 98(542), July 2014, pp. 334-339.

204. *Generalizations of a 19th Century result on ellipses*. The Mathematical Gazette, Nov. 2014, pp. 414-423. (With Michael Fox).

205. *Over and Over again; Two Geometric Iterations with Triangles*. Learning & Teaching Mathematics, 16, July 2014, pp. 40-45.

206. *Quasi-circumcenters and a Generalization of the Quasi-Euler Line to a Hexagon*. Forum Geometricorum, Vol 14, 2014, pp. 233-236.

207. *An Investigation of Some Properties of the General Haag Polygon*. Mathematics in School, 43(3), May 2014, pp. 15-18.

208. *Conjecturing, refuting and proving within the context of dynamic geometry*. (2014). Learning & Teaching Mathematics, no. 17. Dec, pp. 20-26.

209. *Slaying a Geometrical Monster: Finding the Area of a Crossed Quadrilateral*. (2014). Scottish Mathematical Council Journal, 44 (2014), 71-74.

210. *Slaying a Geometrical Monster: Finding the Area of a Crossed Quadrilateral (with some slight modification and different proof)*. (2015). Learning & Teaching Mathematics, No. 18, June 2015, pp. 23-28.

211. *Flashback to the Past: a 1949 Matric Geometry Question*. At Right Angles, Nov. 2015.

212. *Crossed Quadrilaterals: A Missed Lakatosian Opportunity?* Philosophy of MathematicsEducation Journal, July 2015.

213. *Order of Operations: The Myth and the Math*. (In press). AMESANews, Dec 2015.

214. *The definition of the scalar product: An analysis and critique of a classroom episode*. International Journal for Mathematics Education in Science & Technology. (With Colin Foster), Dec 2015.

215. *An explanatory, transformation geometry proof of a classic treasure-hunt problem and its generalization*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1210245, Aug 2016.

216. *An Example of Constructive Defining: From a Golden Rectangle to Golden Quadrilaterals and beyond Investigates different possible definitions for various 'golden' quadrilaterals that involve some aspect of the golden ratio*. At Right Angles, Vol 6, no 1, March 2017, pp. 64-69; Vol 6, No 2, August 2017.

217. *A cyclic Kepler quadrilateral and the Golden Ratio Defines a "Kepler quadrilateral" as a quadrilateral with sides in geometric progression of $\sqrt{\varphi}$, and proves an interesting property when it is cyclic*. At Right Angles, March 2018, pp. 91-94.

218. *A Merry-Go-Round the Triangle*. Learning & Teaching Mathematics, June 2018, No. 24, pp. 17-20, 446 KB, PDF. Co-author: John Silvester.

219. *A surprising 3D result involving a hexagon*. Mathematical Gazette, July 2018. 2018, Vol. 102, No. 554, pp. 328-330.

220. *Why does it Work? A Mathematical Explanation and Further Generalization of a Card Trick A card trick is mathematically explained using elementary school algebra and then generalized*. Learning & Teaching Mathematics, Dec 2018, no. 24, pp. 30-31.

221. *A Diagonal Property of a Rhombus Constructed from a Rectangle*, Learning and Teaching Mathematics, (Co-author: James Metz), December 2018, no. 25, pp. 26-27.

222. *Tiling with a Trilateral Trapezium and Penrose Tiles*. Learning & Teaching Mathematics, March 2019, no. 25, pp. 6-10.

223. *An Interesting Collinearity*. Learning & Teaching Mathematics, July 2019. No. 26, pp. 28-30. (Co-author: Piet Human).

224. *More Area, Perimeter and Other Properties of Circumscribed Isosceles Trapeziums and Cyclic Kites*. Learning and Teaching Mathematics, No. 27, 2019, pp. 30-33.

225. *Proof as a means of discovery*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1663952, Sept. 2019.

226. *An interesting theorem related to a hexagon with opposite sides that are parallel*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, DOI: 10.1080/0020739X.2020.1745914, March 2020.

227. *The Area of Concave and Crossed Quadrilaterals in Terms of their Diagonals*. Learning and Teaching Mathematics, July 2020, No. 28, pp. 19-21.

228. *Ghosts of a problem past*. At Right Angles, March 2021, pp. 105-111. (Co-author: Hans Humenberger, University of Vienna, Austria). Available at: http://publications.azimpremjifoundation.org/2676/

229. *The Value of using Signed Quantities in Geometry*. Learning and Teaching Mathematics, Dec. 2020.

230. *The Tangential or Circumscribed Quadrilateral*. Learning and Teaching Mathematics, Dec. 2020.

231. *Forgotten Properties of the Van Aubel & Bride's Chair Configurations*. International Journal of Geometry, Vol. 10 (2021), No. 3, 5 - 10. (Co-author, Dario Pellegrinetti). URL: https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2021/07/1.-5-10.pdf

232. *Some more properties of the bisect-diagonal quadrilateral*. To appear, The Mathematical Gazette, Nov. 2021.

233. *Another Bicentric Quadrilateral Construction*. To appear, Learning & Teaching Mathematics, Dec. 2021.

234. *An extension of an IMO-2014 Geometry Problem*. To appear, Learning & Teaching Mathematics, Dec. 2021.

235. *The twin circles for the generalized Van Aubel's configuration*. Accepted, The Mathematical Gazette, Nov. 2022. (Co-author, Dario Pellegrinetti, European Space Agency, Darmstadt, Germany).

236. *An associated result of the Van Aubel configuration and its generalization*. Submitted International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

10. Literatura

1. Albers, D. J. 1982. Paul Halmos:*Maverick mathologist*. The Two-Year College Mathematics Journal 13 (4): 234-241.
2. Alibert, D. 1988. *Towards new customs in the classroom*. For the Learning of Mathematics 8 (2): 31-35; 43.
3. Bell, A. W. 1976. *A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations*. Educational Studies in Mathematics 7: 23-40.
4. Burger, W. F., and J. M. Shaughnessy, 1986. *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*. Journal for Research in Mathematics Education 17 (1): 31-48.
5. Coxeter, H. S. M., and S. L. Greitzer. 1967. *Geometry revisited*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
6. Davis, P. J. 1976. *The nature of proof*. In Proceedings of the fifth international congress on mathematical education, edited by M. Carss. Boston: Birkhauser.
7. Davis, P. J., and R. Hersh. 1983. *The mathematical experience*. Great Britain: Pelican Books.
8. —. 1986. *Descartes, dream*. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
9. Deer, G. W. 1969. *The effects of teaching an explicit unit in logic on students' ability to prove theorems in geometry*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University. Dissertation Abstracts International 30: 387-399.
10. de Jager, C. J. 1990. *When should we use pattern?* Pythagoras 23: 11-14.
11. de Villiers, M. D. 1986. *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. RUMEUS Studies in Mathematics Education No. 2. Stellenbosch, South Africa: Research Unit for Mathematics Education of the University of Stellenbosch (RUMEUS).
12. —. 1988. *What happens if? Why?* Pythagoras 18: 45-47.
13. —. 1991. *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry*. Pythagoras 26: 18-27.
14. —. 1994. *The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics 14 (1): 11-18.
15. —. 1996. *Some adventures in Euclidean geometry*. Durban, South Africa: University of Durban-Westville.
16. —. 1997. *The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. In Geometry Turned On!* edited by D. Schattschneider and J. King . Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
17. —. 1998a. *Dual generalizations of van Aubel,s theorem*. The Mathematical Gazette 82 (495) (Nov): 405-412.
18. —. 1998b. *To teach definitions in geometry or teach to define?* In Olivier, A., and K. Newstead, eds., Proceedings of 22nd PME-Conference, University of Stellenbosch, South Africa, 12-17 July 1998, vol. 2: 248-255.

19. —. 1999a. *A further generalization of the Fermat-Torricelli point*. The Mathematical Gazette 83 (496) (March): 14-16.
20. —. 1999b. *A Sketchpad discovery involving areas of inscribed polygons*. Mathematics in School 28 (1) (March): 18-21.
21. —. 2000. *Generalizing van Aubel using duality*. Mathematics Magazine 73 (4) (Oct): 303-306.
22. Donaldson, M. 1979. *Children's minds*. New York:W. W. Norton.
23. Fischbein, E. 1982. *Intuition and proof*. For the Learning of Mathematics 3 (2): 9-18.
24. Freudenthal, H., ed. 1958. *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: Wolters.
25. Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.
26. Fuys,D., D. Geddes, and R. Tischler. 1988. *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. JRME Monograph No. 3, Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.
27. Gale, M. D. 1990. *Proof as explanation*. The Mathematical Intelligence. 12 (1): 4.
28. Gonobolin, F. N. 1954. *Pupils' comprehension of geometric proofs*. In Wilson, J. W., ed., 1975, Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. 12, Problems of Instruction. Chicago: University of Chicago.
29. Govender, R., and M. D. de Villiers. 2002. *Formulation and evaluation of definitions in a Sketchpad context*. Paper presented at AMESA 2002, Durban, South Africa.
30. Griffiths, H. B., and A. G. Howson. 1974. *Mathematics: Society and curricula*. London: Cambridge University Press.
31. Grünbaum, B., and G. C. Shephard. 1995. *Ceva, Menelaus, and the area principle*. Mathematics Magazine 68 (4) (Oct): 254-268.
32. Hanna, G. 1983. *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.
33. —. 1989. *More than formal proof*. For the Learning of Mathematics 9 (1): 20-23.
34. Hewson, S. N. P. 1977. *Inferential problem solving in young children*. Unpublished doctoral dissertation, Oxford University.
35. Hildebrandt, S., and A. Tromba. 1985. *Mathematics of Optimal Form*. New York: Scienti?c American Library of W. H. Freeman & Co.
36. Hull, L. W. H. 1969. *The superstition of educated men*. Mathematics Teaching 43: 26-31.
37. Human, P. G. 1978. *Wiskundige werkwyses in Wiskunde-onderwys*. Unpublished doctoral dissertation, University of Stellenbosch.
38. Human, P. G., and J. H. Nel. 1989. In cooperation with
39. M. D. de Villiers, T. P. Dreyer, and S. F. G. Wessels. *USEME curriculum material*. Research Unit for Mathematics Education of the University of Stellenbosch (RUMEUS).
40. Human, P. G., and J. H. Nel. 1997. In cooperation with M. D. de Villiers, T. P. Dreyer, and S. F. G. Wessels. Alternative instructional strategies in geometry education: A theoretical and empirical study. A translation of the theoretical part of the ?nal report on the USEME project by the Research Unit for Mathematics Education of the University of Stellenbosch (RUMEUS) can be downloaded from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/ homepage4.html [October 7, 2002].

41. Johnson, R. A. 1929. *Advanced Euclidean geometry*. New York: Dover Publications.

42. Kelly. P. J. 1966. *Van Aubel's quadrilateral theorem*. Mathematics Magazine 39: 35-37.

43. Keyton, M. 1997. *Students discovering geometry using dynamic software. In Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research*, edited by J. King and D. Schattschneider. Washington, D.C.: Mathematical Association of America: 63-68.

44. King, J. 1997. *An eye for similarity transformations. In Geometry Turned On!* edited by D. Schattschneider and J. King. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

45. Klein, F. 1925. *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. New York: Macmillan.

46. Kline, M. 1973. *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. New York: St. Martin's Press.

47. —. 1985. *Mathematics for the nonmathematician*. New York: Dover Publications.

48. Krygowska, A. Z. 1971. *Treatment of the axiomatic method in class*. In Teaching school mathematics, edited by W. Servais and T. Varga. London: Penguin-Unesco. 124-150.

49. Lakatos, I. 1976. *Proof and refutations*. Cambridge; New York: Cambridge University Press.

50. Manin, Y. I. 1981. *A digression on proof*. The Two-Year College Mathematics Journal 12 (2): 104-107.

51. The Mathematical Association of South Africa. 1978. *South African Mathematics Project: Syllabus Proposals*. Pretoria: MASA. (Now Centrahil: AMESA).

52. Movshovitz-Hadar, N. and J. Webb. 1998. *One Equals Zero*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

53. Mudaly, V. 1998. *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry*. Unpublished M.Ed. dissertation, University of Durban-Westville.

54. Mudaly, V., and M. de Villiers. 2000. *Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry*. Pythagoras 52 (August): 20-23.

55. Mueller, D. J. 1975. *Logic and the ability to prove theorems in geometry*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University. Dissertation Abstracts International 36: 851A.

56. Polya, G. 1919. *L'Enseignment mathematique*, no. 4: 355-379.

57. —. 1954. *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. 1, Induction and analogy in mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press.

58. —. 1981. *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving (2 vols.)*. New York: John Wiley and Sons.

59. Renz, P. 1981. *Mathematical proof: What it is and what it ought to be*. The Two-Year College Mathematics Journal 12 (2): 83-103.

60. Rota, Gian-Carlo. 1997. *Indescrete thoughts*. Boston: Birkhauser.

61. Schoenfeld, A. H. 1986. *On having and using geometric knowledge. In Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, edited by J. Hiebert. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.

62. Sharygin, I. 2000. *Two articles and two hundred problems*. Paper presented at ICME 9, Japan.

63. Smith, R. R. 1940. *Three major dif?culties in the learning of demonstrative geometry*. The Mathematics Teacher 33: 99-134; 150-178.

64. Tall, D. 1989. *The nature of mathematical proof*. Mathematics Teaching 127(June): 28-32.

65. van Asch, A. G. 1993. To prove, why and how? International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 24 (2): 301-313.

66. van Dormolen, J. 1977. *Learning to understand what giving a proof really means*. Educational Studies in Mathematics 8: 27-34.

67. van Hiele, P. M. 1973. *Begrip en Inzicht*. Purmerend, Netherlands: Muusses.

68. Volmink, J. D. 1990. *The nature and role of proof in mathematics education*. Pythagoras 23: 7-10.

69. Wallington, B. A. 1974. *Some aspects of the development of reasoning in preschool children*. Unpublished doctoral dissertation, University of Edinburgh.

70. Walter, R. L. 1972. *The effect of knowledge of logic in proving mathematical theorems in the context of mathematical induction*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University. Dissertation Abstracts International 33: 262A.

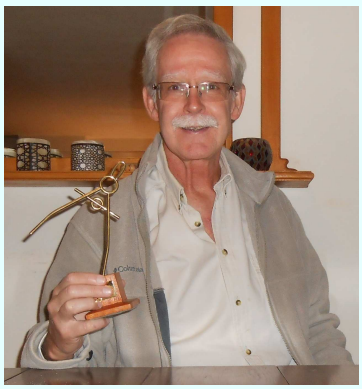
71. Wason, P. C., and P. N. Johnson-Laird, 1972. *Psychology of reasoning: Structure and content*. London: Batsford.

72. Wilder, R. L. 1944. *The nature of mathematical proof*. American Mathematical Monthly 51: 309-323.

73. Winicki-Landman, G. 2001. *Research of original geometric concepts: some episodes from the classroom*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 32 (5): 727-744.

74. Yaglom, I. M. 1962. *Geometric transformations I*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Bilješka o autoru



Na fotografiji autor drži nagradu koju je dobio od the South African Mathematics Foundation za 20 godina rada za the SA Mathematics Olympiad.

***

Michael de Villiers completed his **B.Sc** and **HDE** respectively in 1977 and 1978 at the **University of Stellenbosch**. After teaching mathematics and science in **Karasburg (Namibia)** and **Diamantveld (Kimberley)**, he worked as researcher from 1983 till 1990 at the **Research Unit for Mathematics Education (RUMEUS)** at the **University of Stellenbosch (Us)**

During this time he completed a **B.Ed (UOFS), M.Ed. (US) and D.Ed. (US)**, and spent a year sabbatical at **Cornell University, USA**, on **Rotary Foundation and Harry Crossley** scholarships.

Since 1991 he has been at the **University of Durban-Westville**, and from 2004 part of the **University of KwaZulu-Natal (UKZN)**.

At the end of January 2016, he retired from **UKZN**, but has been appointed as an honorary professor in mathematics education at the **University of Stellenbosch**.

He has already published **9 books** and **over 200 reviewed articles**.

Between 1988-1997, he was editor of **Pythagoras**, the research journal of the **Association of Mathematics Education of South Africa (AMESA)**, and from 1997 - 2016, he was vice-chair of the **SA Mathematics Olympiad**, and still currently serves as **Convener of the Senior Olympiad Committee**.

He is a regular speaker at local and international conferences on mathematics and mathematics education, and has been invited as a main plenary speaker at congresses in **Spain, Croatia, Portugal, Taiwan**, and **USA**.

His main research interests are **Geometry, Mathematical Proof, Applications and Modeling, Problem Solving, Problem-Centered Learning & Teaching**, and the **History and Philosophy of Mathematics**.

Michael de Villiers završio je 1977. godine preddiplomski studij i 1978. godine diplomski studij na Sveučilištu u Stellenboschu.

Nakon što je predavao matematiku i prirodoslovlje u Karasburgu (Namibija) i Diamantveldu (Kimberley), radio je kao istraživač od 1983. do 1990. na Istraživačkoj jedinici za matematičko obrazovanje (RUMEUS) na Sveučilištu Stellenbosch (SAD).

Za to vrijeme završio je B.Ed (UOFS), M.Ed. (SAD) i D.Ed. (SAD), a godinu dana proveo je na odmoru na Sveučilištu Cornell, SAD, na stipendijama Rotary Foundation i Harryja Crossleyja.

Od 1991. bio je na Sveučilištu Durban-Westville, a od 2004. dio Sveučilišta KwaZulu-Natal (UKZN).

Krajem siječnja 2016. povukao se iz UKZN-a, ali je imenovan za počasnog profesora matematičkog obrazovanja na Sveučilištu Stellenbosch.

Objavio je već 9 knjiga i preko 200 recenziranih članaka.

Između 1988. i 1997. bio je urednik Pythagore, istraživačkog časopisa Udruženja matematičkog obrazovanja Južne Afrike (AMESA), a od 1997.-2016. bio je potpredsjednik olimpijade SA iz matematike, a još uvijek služi kao sazivač Odbora za seniorske olimpijade.

Redoviti je predavač na lokalnim i međunarodnim konferencijama o matematici i matematičkom obrazovanju, a pozvan je i kao glavni plenarni predavač na kongresima u Španjolskoj, Hrvatskoj, Portugalu, Tajvanu i SAD-u.

Njegov glavni istraživački interes su geometrija, matematički dokazi, primjene i modeliranje, rješavanje problema, učenje i poučavanje usmjereno na probleme te povijest i filozofija matematike.

ISBN 978-953-49726-1-8